

# Eine Riemannsche Betrachtung des Reeb-Flusses

**Dissertation**

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Stefan Hainz

aus

Bad Windsheim

Bonn 2006



Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1.Referent: Prof. Ursula Hamenstädt  
2.Referent: Prof. Werner Ballmann

Tag der Promotion: 13.12.2006



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit beweisen wir Aussagen über die symplektischen Eigenschaften beschränkter streng konvexer Körper  $C$  in  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ , indem wir diese in Relation zu den metrischen Eigenschaften der Körper setzen. Zunächst betrachten wir den Reeb-Fluss auf dem Rand  $\Sigma$  des Körpers  $C$ . Wir beweisen, wie sich der Maslov-Index  $\mu(\gamma)$  eines geschlossenen Reeb-Orbits  $\gamma$  mit Hilfe der Weingarten-Abbildung entlang  $\gamma$  berechnen lässt. Mit dem Satz von Fary-Milnor folgt dann sofort, dass jeder Reeb-Orbit  $\gamma$  mit Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  auf dem Rand eines beschränkten streng konvexen Körpers, dessen Hauptkrümmungen  $a \geq b \geq c$  in jedem Punkt die Relation  $b + c \geq a$  erfüllen, eine in  $\Sigma$  eingebettete Scheibe berandet. Weiter zeigen wir, dass diese Orbits die Selbstverlinkungszahl  $-1$  haben. Spannen wir minimale Flächen in Reeb-Orbits vom Maslov-Index drei ein, so zeigen wir unter den obigen Krümmungsvoraussetzungen, dass diese Scheiben symplektisch und nach einem Theorem von Ekholm, White und Wienholtz ebenfalls eingebettet sind. Wir definieren weiter eine Verklebeoperation für Reeb-Orbits. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass mit Hilfe des Orbits minimaler Wirkung auf dem Rand eines konvexen Körpers eine Kapazität definiert werden kann und dass ein konvexer Körper der Durchschnitt der Halbräume ist, die durch seine Tangentialebenen definiert werden. Das bedeutet, dass wir unter speziellen Voraussetzungen aus einem beschränkten streng konvexen Körper einen neuen konvexen Körper konstruieren können. Auf diesem entsteht ein geschlossener Reeb-Orbit dadurch, dass wir eine offene Flusslinie auf dem alten Körper "verkleben". Das letzte Kapitel der Arbeit ist in Zusammenarbeit mit Ursula Hamenstädt entstanden. Es ist bekannt, dass für Ellipsoide alle normierten Kapazitäten den gleichen Wert haben. Wir zeigen, dass dies auch für kleine Deformationen von Ellipsoiden, die nicht der runde 4-Ball sind, richtig ist.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Der Maslov-Index . . . . .	5
1.2 Kapazitäten . . . . .	8
1.3 Die Selbstverlinkungszahl . . . . .	9
<b>2 Geschlossene Orbits und deren Krümmung</b>	<b>11</b>
2.1 Eine Formel für den Maslov-Index . . . . .	11
2.2 Knotenobstruktionen . . . . .	16
<b>3 Minimale und symplektische Scheiben</b>	<b>19</b>
3.1 Berechnung der relativen Euler-Klasse . . . . .	21
3.2 Berechnung der relativen Chern-Klasse . . . . .	22
3.3 Die symplektische Scheibe . . . . .	24
3.4 Die Selbstverlinkungszahl . . . . .	29
<b>4 Abschätzungen für den Reeb-Fluss</b>	<b>35</b>
4.1 Eigenschaften konvexer Körper . . . . .	35
4.2 Verkleben von Reeb-Orbits . . . . .	37
4.3 Obstruktionen an den Reeb-Fluss . . . . .	42
<b>5 Stabilität</b>	<b>49</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>58</b>



# Einleitung

Die Eigenschaft einer Teilmenge von  $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  konvex zu sein, ist eine rein metrische und keine symplektische Invariante. Bezeichnen wir mit  $\omega_0$  die zu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kompatible symplektische Standardstruktur, so sind konvexe Körper, aufgefasst als Teilmengen von  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ , dennoch von großem Interesse in der symplektischen Geometrie. Neben der Darstellbarkeit als Niveaumengen besonders einfacher Funktionen haben sie weitere vorteilhafte geometrische Eigenschaften, die die notwendige Grundlage für viele Beweise bilden.

Wir befassen uns ausschließlich mit der Betrachtung beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand in  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ . Weiter gehen wir davon aus, dass die konvexen Körper den Nullpunkt enthalten. Da konvexe Gebiete bezüglich ihrer inneren Punkte sternförmig sind, erhält damit der Rand eines konvexen Körpers mit der kanonischen Eins-Form  $\lambda_0$  als Kontaktform die Struktur einer Kontaktmannigfaltigkeit. Die Flusslinien des Reeb-Flusses auf dieser Kontaktmannigfaltigkeit entsprechen den Trajektorien des Hamiltonschen Flusses. Für die genauen Definitionen der hier verwendeten Begriffe möchten wir auf Kapitel 1 verweisen.

Wenn wir von konvexen Körpern sprechen, meinen wir von nun an beschränkte konvexe Körper mit glattem Rand. Wir betrachten zwei besondere Aspekte konvexer Körper. Der erste ist der Reeb-Fluss auf dem Rand der Körper. Weinstein vermutete, dass der Reeb-Fluss jeder Kontaktmannigfaltigkeit einen geschlossenen Orbit hat und konnte seine Vermutung für die Ränder konvexer Körper selber beweisen. Hofer und Zehnder fanden weiter heraus, dass die minimale Wirkung der Reeb-Orbiten eine symplektische Kapazität, d.h. eine Art Volumenform, für konvexe Körper darstellt. Genauere topologische Ergebnisse erbrachten Hofer, Zehnder und Wysocki in ihren Artikeln über die Dynamik des Reeb-Flusses. Sie zeigten, dass der Fluss auf dem Rand eines konvexen Körpers entweder zwei oder unendlich viele unverknotete Orbiten hat. Unverknotet bedeutet in diesem Fall, dass der Orbit eine in den Rand des Körpers eingebettete Kreisscheibe berandet. Außerdem zeigten sie neben weiteren dynamischen Eigenschaften die Existenz eines unverknoteten Orbits mit der Selbstverlinkungszahl  $-1$ . Alle diese Ergebnisse wurden mit Hilfe der Variationsrechnung und der Theorie der pseudo-holomorphen Kurven bewiesen. Leider ergaben die Betrachtungen keine weiteren Einsichten über den Orbit minimaler Wirkung. Unverknotete Orbiten mit Selbstverlinkungszahl  $-1$  können sogenannte "Surfaces of Section" beranden. Wäre es möglich eine solche Fläche in den minimalen Orbit einzuspannen, gäbe das weiteren Aufschluss über die Dynamik des Reeb-Flusses. Daher stellten Hofer, Zehnder und Wysocki die Frage:

*Frage 1: Ist der Orbit minimaler Wirkung auf dem Rand einer konvexen Teilmenge von  $\mathbb{R}^4$  unverknotet und hat er Selbstverlinkungszahl  $-1$ ?*

Die Kapitel 2,3 und 4 dieser Arbeit befassen sich mit der Problematik des Reeb-Flusses und geben für eine große Klasse von Körpern eine positive Antwort auf diese Frage. Anders als die oben genannten Autoren verwenden wir dazu Methoden aus der Riemannschen Geometrie, um Aufschluss über den Reeb-Fluss zu erhalten.

Der zweite wichtige Aspekt bei der Betrachtung konvexer Körper und symplektischer Mannigfaltigkeiten allgemein ist der der Kapazitäten. Wie oben erwähnt ist die Wirkung des Orbits minimaler Wirkung auf dem Rand eines konvexen Körpers eine solche Kapazität. Weitere Kapazitäten sind beispielsweise der Gromov-Radius  $c_0$  und die Zylindrische Kapazität  $c_p$ . Für jede normierte Kapazität  $c$ , d.h.  $c(B_1) = c(Z_1) = 1$ , gilt  $c_0 \leq c \leq c_p$ . Es ist leicht zu zeigen, dass Ellipsoide  $E$  die Gleichung  $c_0(E) = c_p(E)$  erfüllen, d.h. auf Ellipsoiden sind alle normierten Kapazitäten gleich. Hermann hat diese Eigenschaft auch für sogenannte Reinhart-Bereiche nachgewiesen, die nicht notwendig konvex sind. Er hat andererseits auch sternförmige Gebiete konstruiert, die diese Gleichung nicht erfüllen. Für konvexe Körper ist dahingehend nichts weiteres bekannt. Es stellt sich daher die Frage:

*Frage 2: Für welche Teilmengen von  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$  sind alle normierten Kapazitäten gleich?*

Mit dieser Frage beschäftigen wir uns im letzten Kapitel und beweisen eine Stabilitätsaussage für die Gleichheit aller normierten Kapazitäten in der Nähe von Ellipsoiden.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut. In Kapitel 2 betrachten wir den Maslov-Index für geschlossene Orbits des Reeb-Flusses. Dazu definieren wir zunächst eine kanonische Trivialisierung der Kontaktstruktur und stellen das Differential des Flusses eingeschränkt auf die Kontaktstruktur mittels der Flächennormalen auf dem Rand des Körpers dar. Daraus ergibt sich eine Integraldarstellung für den Index, die nur von der Weingarten-Abbildung entlang des Orbits abhängt. Diese Darstellung ist auch auf sternförmigen Gebieten richtig. Wir können allerdings auf konvexen Gebieten die totale Krümmung des Reeb-Orbits durch Abschätzen der Weingarten-Abbildung beschränken. Bei sternförmigen Gebieten ist dies auf diese Weise nicht möglich. Betrachtet man nur Körper, auf denen in jedem Punkt des Randes die Summe von zwei Hauptkrümmungen größer ist als die dritte, so zeigen wir mit dem Satz von Fary-Milnor, dass jeder Reeb-Orbit mit Maslov-Index drei unverknotet ist. Da nach einem Resultat von Ekeland der Orbit minimaler Wirkung ebenfalls Maslov-Index drei hat, haben wir somit die erste Frage teilweise beantwortet.

In Kapitel 3 untersuchen wir global flächenminimierende Kreisscheiben in  $\mathbb{R}^4$ , die an einem Reeb-Orbit aufgehängt sind. Nachdem wir  $\mathbb{R}^4$  kanonisch mit  $\mathbb{C}^2$  identifizieren, erhalten wir Aussagen über die Anzahl holomorpher und antiholomorpher Punkte sowie über die Einschränkung der symplektischen Form auf die Scheiben. Dazu verwenden wir die von Webster und Wolfson ausgearbeitete Theorie über immersierte minimale Flächen in Kähler-Mannigfaltigkeiten. Wir

schränken nun wieder die Hauptkrümmungen auf dem Rand des Körpers ein. Dann erhalten wir mit der in Kapitel 2 bewiesenen Integralformel und einem Theorem von Ekholm, White und Wienholtz folgende Aussage: Jede minimale Fläche, die einen Orbit vom Index drei berandet, ist eingebettet und genau dann symplektisch, wenn die Selbstverlinkungszahl des Orbits  $-1$  ist. Mit Hilfe einer explizit konstruierten Seifert-Fläche zeigen wir, dass jeder Orbit vom Index drei auf dem Rand eines Körpers mit den gestellten Krümmungsbeschränkungen diese Voraussetzung erfüllt. Dabei geht erneut die Abschätzung der Kurvenkrümmung über den Maslov-Index ein. Damit haben wir als Antwort auf die erste Frage das folgende Theorem bewiesen.

**Theorem.** *Wenn die Hauptkrümmungen  $a(p) \geq b(p) \geq c(p)$  auf dem Rand eines beschränkten streng konvexen Körpers in jedem Punkt  $p$  die Relation  $c(p) + b(p) \geq a(p)$  erfüllen, ist jeder Reeb-Orbit  $\gamma$  mit Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  unverknotet. Außerdem hat er die Selbstverlinkungszahl  $lk(\gamma) = -1$  und berandet eine eingebettete, symplektische, flächenminimierende Kreisscheibe, die den Körper nicht verlässt.*

In Kapitel 4 benötigen wir die Eigenschaft konvexer Körper, dass über den Reeb-Orbit minimaler Wirkung eine Kapazität definiert werden kann. Zunächst definieren wir eine Verklebeoperation, mit der wir die Enden einer offenen Flusslinie "zusammenkleben", die nahe genug beieinander liegen. Genauer gesagt konstruieren wir einen neuen konvexen Körper in  $\mathbb{R}^4$ , auf dem die Kurve, die durch Verkleben der offenen Enden entsteht, ein Reeb-Orbit ist. Diese Konstruktion ist auf jedem streng konvexen Körper durchführbar, sobald die offenen Enden sich näher als eine Konstante kommen, die nur von der Weingarten-Abbildung des Randes des Körpers abhängt. Die Verklebeoperation und die Tatsache, dass die Wirkung des minimalen Orbits eine Kapazität ist, ermöglicht eine Schranke  $\epsilon$  anzugeben, die nur von der Weingarten-Abbildung abhängt, sodass die  $\epsilon$ -TUBE um den minimalen Reeb-Orbit eingebettet ist.

Kapitel 5 ist in Zusammenarbeit mit Ursula Hamenstädt entstanden. Darin kommen wir der Antwort auf die zweite der oben gestellten Fragen näher. Ordnet man einem konvexen Körper die minimale Wirkung der Reeb-Orbiten auf dem Rand zu und teilt diese durch  $\pi$ , so erhält man die oben beschriebene Hofer-Zehnder-Kapazität  $c_{HZ}$ . Zunächst definieren wir die  $C^n$ -Topologie auf dem Raum der streng konvexen Körper. Damit können wir folgendes Theorem formulieren und beweisen.

**Theorem.** *Sei  $E(r, R)$  ein Ellipsoid in  $\mathbb{R}^4$ .*

1. *Es existiert eine  $C^4$ -Umgebung  $U$  um  $E$ , sodass  $c_{HZ}(C) = c_p(C)$  für alle konvexen Körper  $C \in U$ .*
2. *Gilt weiter  $r < R$ , so existiert eine  $C^4$ -Umgebung  $V$  um  $E$ , sodass  $c_{HZ}(C) = c_0(C)$  für alle  $C$  in  $V$ .*

Dazu konstruieren wir explizit einen Symplektomorphismus, der den konvexen Körper so in den Zylinder abbildet, dass der Standardball im Inneren des Bildes liegt, falls die zweite Voraussetzung erfüllt ist. Zur Konstruktion dieser Abbildung ist es wichtig, dass der minimale Reeb-Orbit eine symplektische Scheibe berandet, die im Inneren des Körpers liegt. Unter den Voraussetzungen des

Theorems lässt sich diese Scheibe explizit konstruieren. Ob sich die Konstruktion mit Hilfe der in Kapitel 4 gefundenen Scheiben auf Körper mit den in Kapitel 2 und 3 angegebenen Krümmungsvoraussetzungen verallgemeinern lässt, ist noch unklar.

# Kapitel 1

## Grundlagen

Sei  $(\Sigma, \lambda)$  eine *Kontaktmannigfaltigkeit*, d.h.  $\Sigma$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $2n + 1$  und  $\lambda \in \Gamma(T^*\Sigma)$  ein Schnitt in  $T^*\Sigma$ , sodass  $\lambda \wedge (d\lambda)^n$  eine Volumenform auf  $\Sigma$  ist. Die *Kontaktstruktur*  $\xi := \ker(\lambda)$  ist eine nichtintegrierte Distribution von  $T\Sigma$  und  $(\xi, d\lambda|_\xi)$  ein symplektisches Bündel über  $\Sigma$ . Als allgemeine Einführung in die Theorie der Kontaktmannigfaltigkeiten bietet sich [Gei06] an.

Das *Reeb-Vektorfeld*  $X \in \Gamma(T\Sigma)$  zu  $\lambda$  ist eindeutig definiert durch

$$\lambda_p(X(p)) = 1 \text{ und } i_{X(p)}d\lambda_p = 0 \quad \forall p \in \Sigma.$$

Der *Reeb-Fluss*  $\Psi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$  ist dann gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(p)|_{t=t_0} = X(\Psi_{t_0}(p)).$$

Hofer, Zehnder und Wysocki haben sich in ihren Artikeln [HWZ03],[HWZ99],[HWZ98],[HWZ96],[HWZ95a] ausführlich mit dem Reeb-Fluss auf der Dreisphäre, den wir hier ebenfalls betrachten, beschäftigt.

### 1.1 Der Maslov-Index

Da der Reeb-Fluss die Kontaktform  $\lambda$  invariant lässt, ist

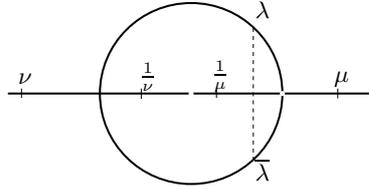
$$d\Psi_t(p) : \xi(p) \rightarrow \xi(\Psi_t(p))$$

eine lineare, symplektische Abbildung. Seien auf  $\Sigma$  alle Reeb-Orbiten nullhomotop und es gelte  $\pi_2(\Sigma) = 0$ . Dann existiert über jedem geschlossenen Reeb-Orbit  $\gamma$  eine bis auf Homotopie eindeutige, symplektische Trivialisierung von  $\xi$ , die sich auf jede Kreisscheibe  $u : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\Sigma, \gamma)$  fortsetzen lässt. Bezeichne mit

$$T_p : \xi(p) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

diese Trivialisierung. Dann ist

$$\Phi(t) := T_{\Psi_t(p)} \circ d\Psi_t(p) \circ T_p^{-1}$$

Abbildung 1.1: Eigenwerte in  $SP^*(1)$ 

ein Weg in der symplektischen Gruppe  $SP(n)$  mit  $\Phi(0) = id$ . Für geschlossene Kurven  $c : S^1 \rightarrow SP(n)$  existiert der kanonische Isomorphismus

$$\mu_M : \pi_1(SP(n)) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dieser bildet die Kurve von Matrizen

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi it} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$$

auf eins ab. Bezeichne nun  $SP(n)^*$  die Teilmenge von  $SP(n)$ , deren Elemente nicht den Eigenwert eins besitzen. Sei  $S$  die Menge der stetigen Kurven

$$c : [0, T] \rightarrow SP(n)$$

mit  $c(0) = id$  und  $c(T) \in SP(n)^*$ . Dann existiert eine eindeutige Abbildung  $\mu : S \rightarrow \mathbb{Z}$  mit den Eigenschaften:

1.  $\mu$  ist homotopieinvariant in  $S$
2. Für  $c \in S$  und jeden Repräsentanten  $b$  von  $[b] \in \pi_1(SP(n), Id)$  gilt

$$\mu(c \circ b) = \mu(c) + 2\mu_M([b]),$$

wobei  $\circ$  das Hintereinanderdurchlaufen der Wege beschreibt.

3.  $\mu(c) + \mu(c^{-1}) = 0$ , wobei  $c^{-1}(t) := c(t)^{-1}$
4.  $\mu(t \mapsto e^{it} Id) = n$  für  $t \in [0, \pi]$

Sei  $\gamma$  nun ein geschlossener Reeb-Orbit auf  $\Sigma$  mit der Periode  $T$ . Dann heißt  $\gamma$  nichtdegeneriert, wenn  $\Phi(T) \in SP^*(n)$ , wobei  $\Phi : [0, T] \rightarrow SP(n)$  wie oben definiert ist. In diesem Falle definieren wir den *Maslov-* oder *Conley-Zehnder-Index* von  $\gamma$  als:

$$\mu(\gamma) := \mu(\Phi)$$

Für eine allgemeine Beschreibung des Maslov-Index verweisen wir auf [RS93]. Wir benötigen den Maslov-Index nur für Kurven in  $SP(1)$ . Wie in [HWZ95b] gezeigt, lässt er sich dann wie folgt berechnen.

In Dimension zwei haben die Eigenwerte symplektischer Matrizen die Form  $\nu, \frac{1}{\nu} \in \mathbb{R}$  oder  $\lambda, \bar{\lambda} \in S^1 \subset \mathbb{C}$ .  $\Phi(T)$  habe nun keinen Eigenwert eins. Sollten

die Eigenwerte nicht-reell oder negativ sein, so lässt sich der Weg  $\Phi$ , wie in Abbildung 1.1 zu sehen, in  $SP^*(1)$  zu einem Weg  $\tilde{\Phi} \in S$  mit

$$\tilde{\Phi}|_{[T, T+\tau]} \subset SP^*(1) \text{ und } \tilde{\Phi}(T + \tau) = -Id$$

fortsetzen. Ansonsten existiert eine Fortsetzung  $\tilde{\Phi} \in S$  mit  $\tilde{\Phi}|_{[T, T+\tau]} \subset SP^*(1)$  bis zur Abbildung

$$\tilde{\Phi}(T + \tau) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall existiert eine Homotopie von Kurven in  $S$ , deren Rand fest bleibt und die  $\tilde{\Phi}$  in die Kurve  $\sigma_1 \in S$  deformiert, mit

$$\begin{aligned} \sigma_1 : [0, 1] &\rightarrow SP(1) \\ t &\mapsto e^{i(2k+1)\pi t}. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt dann  $\mu(\Phi) = 2k + 1$ . Im zweiten Fall ist die Fortsetzung in  $S$  über Kurven mit festem Rand homotop zur Verkettung  $\sigma_2 = \sigma \circ b$  von  $\sigma \in S$  und  $b : S^1 \rightarrow SP(1)$ , wobei

$$\begin{aligned} b : [0, 1] &\rightarrow SP(1) \\ t &\mapsto e^{i2k\pi t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma : [1, 2] &\rightarrow SP(1) \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt  $\mu(\Phi) = 2k$ . Wir benötigen folgendes Lemma.

**Lemma 1.1.1.** *Sei  $\Phi \in S$  ein Weg in  $SP(1)$ . Falls  $\mu(\Phi) = 2k + 1$ , dann gilt für alle  $V \in S^1$ , dass*

$$\arg(\Phi(T)V) - \arg(V) \in (2\pi k, 2\pi(k + 1)).$$

*Falls  $\mu(\Phi) = 2k$ , existiert ein Vektor  $V \in S^1$ , sodass gilt*

$$\arg(\Phi(T)V) - \arg(V) = 2\pi k.$$

*Die vollen Umdrehungen der Kurve  $\Phi(t)V \in \mathbb{C} - \{0\}$  werden in beiden Fällen mitgezählt.*

*Beweis.* Wir setzen wie oben  $\tilde{\Phi} \in S$

$$\tilde{\Phi} : [0, T] \rightarrow SP(1)$$

zu  $\tilde{\Phi} \in S$

$$\tilde{\Phi} : [0, T + \tau] \rightarrow SP(1)$$

mit entweder

$$\tilde{\Phi}(T + \tau) = -Id$$

oder

$$\tilde{\Phi}(T + \tau) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

fort. Sei  $\tilde{V}$  so gewählt, dass es reeller Eigenvektor zu  $\tilde{\Phi}(T + \tau)$  ist. Da  $\tilde{\Phi}$  in  $S$  homotop mit festem Rand zu einer der oben angegebenen Standardkurven  $\sigma_1, \sigma_2 \in S$  ist, gilt

$$\begin{aligned} \arg(\tilde{\Phi}(T + \tau)\tilde{V}) - \arg(\tilde{V}) &= (2k + 1)\pi \Leftrightarrow \mu(\tilde{\Phi}) = 2k + 1, \\ \arg(\tilde{\Phi}(T + \tau)\tilde{V}) - \arg(\tilde{V}) &= 2k\pi \Leftrightarrow \mu(\tilde{\Phi}) = 2k. \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist  $\tilde{V}$  beliebig und es muss nach Voraussetzung gelten, dass

$$\tilde{\Phi}(t)\tilde{V} \neq \nu\tilde{V}, \quad \text{für alle } \nu > 0, t \in [T + \tau, T],$$

da sonst die Fortsetzung nicht in  $SP^*(1)$  verläuft. Daher folgt

$$\arg(\tilde{\Phi}(T)\tilde{V}) - \arg(\tilde{V}) \in (2k\pi, 2(k + 1)\pi).$$

In diesem Fall ist  $V = \tilde{V}$  beliebig in  $S^1$  wählbar.

Sei im zweiten Fall  $V_t$  der stetige Weg von Eigenvektoren von  $\tilde{\Phi}(t)$ ,  $t \in [T + \tau, T]$  mit  $V_{T+\tau} = \tilde{V}$ . Die zugehörigen Eigenwerte sind reell. Daher gilt

$$\arg(\tilde{\Phi}(T + t)V_t) - \arg(V_t) = \textit{konst}.$$

Somit erfüllt  $V = V_T$  das Gewünschte. □

## 1.2 Kapazitäten

Kapazitäten dienen einer quantitativen Beschreibung symplektischer Mannigfaltigkeiten. Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine *Kapazität* ist eine Abbildung

$$(M, \omega) \mapsto c(M, \omega) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. Monotonie: Sei  $\varphi : (M, \omega) \rightarrow (N, \tau)$  eine symplektische Einbettung, dann gilt

$$c(M, \omega) \leq c(N, \tau).$$

2. Konformität: Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| \neq 0$  gilt

$$c(M, \alpha\omega) = |\alpha|c(M, \omega).$$

3. Lokale Nichttrivialität: Für den offenen Einheitsball  $B_1$  in  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  gilt

$$c(B_1, \omega_0) > 0.$$

4. Nichttrivialität: Für den offenen, symplektischen Einheitszylinder  $Z_1$

$$Z_1 := \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \mid (x_1, y_1) \in D^2, (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \text{ für } i > 1\}$$

gilt:

$$c(Z_1, \omega_0) < \infty$$

Mit  $\omega_0$  wird die Standardform auf  $\mathbb{R}^{2n}$  bezeichnet, die bei Standardkoordinaten  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  gegeben ist durch

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf beschränkte, streng konvexe Teilmengen  $C$  von  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$  mit glattem Rand. Die Beschränktheit wird im Folgenden vorausgesetzt aber nicht jedes mal erwähnt. Der Nullpunkt von  $\mathbb{R}^4$  soll dabei immer im Inneren von  $C$  liegen. Dies ist keine Einschränkung für die Kapazitäten, da Translationen in  $\mathbb{R}^4$  Symplektomorphismen sind. Sei  $\Sigma := \partial C$  und  $\lambda_0 \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^4)$  die kanonische Eins-Form auf  $\mathbb{R}^4$ . Diese ist im Punkt  $p \in \mathbb{R}^4$  definiert als  $\lambda_0(p) := \frac{1}{2}i_p\omega_0$ , d.h.

$$\begin{aligned} \lambda_0(p) : T_p\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ V &\mapsto \frac{1}{2}\omega_0(p, V), \end{aligned}$$

oder in Koordinaten als

$$\lambda_0 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x_i dy_i - y_i dx_i.$$

$(\Sigma, \lambda_0)$  ist eine Kontaktmannigfaltigkeit. In diesem Fall ist das Kontaktbündel  $\xi = \ker(\lambda_0)$  eine sogenannte straffe Kontaktstruktur, d.h. es existiert keine in  $\Sigma$  eingebettete Kreisscheibe, die am Rand tangential an  $\xi$  ist. Die *Wirkung*  $A(\gamma)$  eines geschlossenen Reeb-Orbits  $\gamma$  definieren wir als

$$A(\gamma) := \int_{\gamma} \lambda_0.$$

Sei

$$A^*(C) := \min\{A(\gamma) \mid \gamma \text{ ist geschlossener Reeborbit auf } \Sigma\}.$$

Ekeland, Hofer und Zehnder haben in [EH87] und [HZ90] für beschränkte, konvexe Teilmengen von  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$  bewiesen, dass  $A^*$  eine Kapazität ist. In [Eke90] ergab es sich, dass der minimale Orbit Maslov-Index  $\mu = 3$  hat. Schließlich haben Hofer, Zehnder und Wysocki in [HWZ98] gezeigt, dass im nichtdegenerierten Fall alle Reeb-Orbiten auf dem Rand eines streng konvexen Körpers Maslov-Index größer oder gleich drei haben.

### 1.3 Die Selbstverlinkungszahl

Sei  $(\Sigma, \lambda)$  eine orientierte Kontakt-Dreimannigfaltigkeit, deren zweite Homotopiegruppe  $\pi_2(\Sigma)$  trivial ist. Ein *transversaler Knoten*  $\gamma$  in  $\Sigma$  ist eine glatte Einbettung

$$\begin{aligned} \gamma : S^1 &\rightarrow \Sigma \\ t &\mapsto \gamma(t), \end{aligned}$$

sodass  $\frac{\partial}{\partial t}\gamma$  transversal zur Kontaktstruktur  $\xi = \ker(\lambda)$  ist. Sei nun  $\gamma$  ein transversaler Knoten in  $\Sigma$ , und sei  $F$  eine Seifert-Fläche zu  $\gamma$ , d.h. eine orientierte, in  $\Sigma$  eingebettete Fläche mit Rand  $\gamma$ , sodass die Orientierung von  $F$  die ursprüngliche Orientierung von  $\gamma$  induziert. Da  $F$  eine Fläche mit Rand ist, lässt sich die Kontaktstruktur über  $F$  trivialisieren. Sei  $v$  ein Schnitt in  $\xi|_F$ , der nirgends verschwindet, und  $\gamma'$  eine Kurve, die entsteht, wenn man  $\gamma$  in Richtung  $v$  verschiebt. Die *Selbstverlinkungszahl*  $\text{lk}(\gamma)$  von  $\gamma$  sei dann die Verlinkungszahl  $\text{lk}(\gamma, \gamma')$  von  $\gamma$  und  $\gamma'$ , d.h. die Summe der Schnittpunkte von  $F$  mit  $\gamma'$  gezählt mit Orientierung. Die Selbstverlinkungszahl ist unabhängig von der Wahl der Seifert-Fläche, da wir  $\pi_2(\Sigma) = 0$  gefordert haben.

Sei  $N_F \in \Gamma(T\Sigma|_F)$  die Normale an  $F$  in  $\Sigma$ . Sei weiter  $\nu \in \Gamma(TF|_\gamma)$  die äußere Normale an  $\gamma$  im Tangentialbündel von  $F$ . Dann spannen  $N_F$  und  $\nu$  ein zweidimensionales Unterbündel von  $T\Sigma$  über  $\gamma$  auf. Angenommen der oben gewählte nichttriviale Schnitt  $v \in \Gamma(\xi)$  entlang  $\gamma$  sei senkrecht zu  $\frac{\partial}{\partial t}\gamma$ , d.h.  $v \in \text{span}(N_F, \nu)$ . Dann ist die Selbstverlinkungszahl von  $\gamma$  gleich der Umlaufzahl von  $v$  in  $\text{span}(N_F, \nu)$  bezüglich der durch  $\{N_F, \nu\}$  gegebenen Trivialisierung. Im allgemeinen Fall müssen wir die orthogonale Projektion von  $v$  auf  $\text{span}(N_F, \nu)$  betrachten. Einen tieferen Einblick in die Theorie der transversalen Knoten erhält man beispielsweise in [Etn05].

## Kapitel 2

# Geschlossene Orbits und deren Krümmung

Der Maslov-Index wurde über Begriffe der symplektischen Geometrie definiert. In diesem Kapitel beschreiben wir den Maslov-Index  $\mu(\gamma)$  eines Reeb-Orbits  $\gamma$  auf dem glatten Rand  $\Sigma$  eines beschränkten, streng konvexen Körpers  $C$  mit Hilfe der Krümmung von  $\Sigma$  entlang  $\gamma$ , d.h. wir verbinden Größen aus symplektischer und Riemannscher Geometrie. Diese Beschreibung stimmt auch bei sternförmigen Gebieten mit der alten Definition überein, jedoch erlaubt sie uns nur im streng konvexen Fall, weitere Aussagen über die Krümmung der Orbits in  $\mathbb{R}^4$  zu machen.

In [HWZ98] wird die Frage aufgeworfen, ob der Orbit minimaler Wirkung auf dem Rand eines konvexen Körpers unverknotet ist und Selbstverlinkungszahl  $lk = -1$  hat. Das abschließende Theorem dieses Kapitels besagt, dass alle Reeb-Orbits  $\gamma$  mit Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  unverknotet sind, wenn die Hauptkrümmungen des Randes des Körpers spezielle Voraussetzungen erfüllen. Damit beantworten wir den ersten Teil der Frage für eine große Klasse konvexer Körper. Die minimalen Orbits könnten somit als Ränder für die in [HWZ98] konstruierten "Surfaces of Section" dienen und sehr einfache Offene-Buch-Zerlegungen von  $\Sigma$  ermöglichen.

### 2.1 Eine Formel für den Maslov-Index

Wie oben sei  $C \subset \mathbb{R}^4$  ein beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand  $\Sigma = \partial C$  und sei  $\lambda = \lambda_0 \in \Gamma(T^*\Sigma)$  definiert durch  $\lambda(p) := \frac{1}{2}i_p\omega_0$ . Wir identifizieren ab jetzt  $\mathbb{R}^4$  kanonisch mit  $\mathbb{C}^2$ . Dadurch erhalten wir die zu  $\omega_0$  kompatible komplexe Struktur

$$J : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

Definiere die *Gauss-Abbildung*

$$\begin{aligned} N : \Sigma &\rightarrow S^3 \\ p &\mapsto N(p), \end{aligned}$$

12 KAPITEL 2. GESCHLOSSENE ORBITEN UND DEREN KRÜMMUNG

die jeden Punkt  $p$  auf die äußere Einheitsnormale  $N$  von  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$  abbildet. Sei  $N(p)$  in komplexen Koordinaten von  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  gegeben als  $(N_1(p), N_2(p))$ . Wir benötigen weiter ein zu  $N$  komplex orthogonales

$$\begin{aligned} M : \Sigma &\rightarrow S^3 \\ p &\mapsto M(p). \end{aligned}$$

Betrachten wir  $N, M$  als Vektoren in  $\mathbb{C}^2$  und definieren die Abbildung  $z \rightarrow \bar{z}$  als komplexe Konjugation in  $\mathbb{C}$ , so habe  $M$  die Form  $M(p) := (-\overline{N_2(p)}, \overline{N_1(p)})$ . Wir bezeichnen mit  $\hat{M}$  die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{M} : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (-\bar{z}_2, \bar{z}_1). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$M(p) = \hat{M}N(p).$$

Außerdem ist  $\hat{M}$  komplex antilinear, d.h.  $i\hat{M} = -\hat{M}i$ . Sei  $\gamma(t)$  eine Kurve in  $\Sigma$ . Dann schreiben wir kurz  $N(t)$  für  $N(\gamma(t))$  und  $M(t)$  für  $M(\gamma(t))$ . Fassen wir  $N$  und  $M$  als Vektoren in  $\mathbb{R}^4$  auf, so gilt das Folgende: Das Reeb-Vektorfeld  $X$  zu  $\lambda$  ist gegeben durch

$$X(p) = f(p)JN(p),$$

mit

$$f(p) = \frac{2}{\langle p, N(p) \rangle_{\mathbb{R}^4}} > 0.$$

Dies sieht man daran, dass

$$d\lambda_p(X, \cdot) = f(p)\omega_0(JN, \cdot) = -f(p)\langle N, \cdot \rangle = 0$$

auf  $T_p\Sigma$  und

$$\lambda_p(f(p)X) = \frac{1}{2}f(p)i_p\omega_0(X) = \frac{1}{2}f(p)\langle Jp, JN \rangle = 1.$$

Ab jetzt bezeichnen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt und  $|\cdot|$  die euklidische Norm in  $\mathbb{R}^4$ .

**Lemma 2.1.1.** *Sei*

$$\pi_p : T_p\Sigma \cap JT_p\Sigma \rightarrow \xi_p$$

*das Inverse der orthogonalen Projektion von  $\xi_p$  auf die komplexe Ebene, die in  $T_p\Sigma$  enthalten ist. Dann bilden  $\{\pi \circ M(p), \pi \circ JM(p)\}$  eine symplektische Basis von  $\xi_p$  für alle  $p \in \Sigma$ .*

*Beweis.* Die symplektische Form  $\omega_0$  ist in jedem Punkt  $p$  gegeben durch

$$\omega_0(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle.$$

Da  $N(p)$  in  $p$  senkrecht auf  $\Sigma$  steht, gilt weiter, dass

$$\pi M(p) = M(p) + lJN(p), \quad \pi JM(p) = JM(p) + sJN(p) \quad , l, s \in \mathbb{R}$$

und daher

$$\omega_0(\pi M, \pi JM) = \langle J \circ \pi M, \pi JM \rangle = \langle JM, JM \rangle = 1.$$

Die Orthonormalbasis

$$\{N(p), JN(p), M(p), JM(p)\}$$

existiert für alle  $p \in \Sigma$ . Die Schnitte  $\{M, JM\}$  ergeben daher eine globale Trivialisierung von  $T\Sigma \cap JT\Sigma$ . Da  $\pi_p$  ein Isomorphismus für alle  $p$  ist, bilden  $\{\pi M, \pi JM\}$  eine globale Trivialisierung von  $\xi$  auf  $\Sigma$ .  $\square$

Wir benutzen die folgende Definition der *Weingarten-Abbildung*. Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} dY_p(X(p)) &= (dY_p(X(p)))^{tan} + (dY_p(X(p)))^{norm} \\ &= \nabla_X Y - \Pi_{X,Y} N(p) \end{aligned}$$

In diesem Fall ist  $\nabla$  der von der euklidischen Metrik auf  $\Sigma$  induzierte Levi-Civita-Zusammenhang und  $\Pi$  die Weingarten-Abbildung, die den Normalanteil der Ableitung bezüglich der inneren Flächennormalen  $-N$  angibt, d.h.

$$\Pi_{X,Y} = -\langle dY(X), N \rangle = \langle dN(X), Y \rangle.$$

Die Weingarten-Abbildung  $\Pi$  im Punkt  $p$  ist demnach eine bilineare, symmetrische Abbildung von  $T_p\Sigma \times T_p\Sigma$  nach  $\mathbb{R}$ . Ist  $\Sigma$  der kompakte, glatte Rand eines streng konvexen Körpers  $C$ , so ist die Weingarten-Abbildung positiv definit. Mit  $\Pi_{max}$  beziehungsweise  $\Pi_{min}$  bezeichnen wir den größten beziehungsweise kleinsten Eigenwert von  $\Pi$  auf ganz  $\Sigma$ , wenn wir  $\Pi$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{T\Sigma}$  als Endomorphismus auffassen.

Sei  $\gamma$  ein Reeb-Orbit auf  $\Sigma$ . Wir gehen ab jetzt davon aus, dass  $(\Sigma, \lambda)$  nicht-degeneriert ist, d.h. dass für alle Reeb-Orbiten  $\gamma$  der Maslov Index  $\mu(\gamma)$  wie in Abschnitt 1.1 definiert ist. Sei  $\Psi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$  der Reeb-Fluss auf  $(\Sigma, \lambda)$ . Wir wollen nun den Maslov-Index  $\mu(\gamma)$  berechnen. Dazu betrachten wir die oben gegebene Trivialisierung von  $\xi$

$$\begin{aligned} T_p : \xi(p) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u\pi M + v\pi JM &\mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sei  $p = \gamma(0)$ . Der Maslov-Index von  $\gamma$  ist dann definiert als der Maslov-Index der Kurve  $\Phi \in S$

$$\Phi(t) := T_{\Psi_t(p)} \circ d\Psi_t(p) \circ T_p^{-1}.$$

$S$  ist wie in Abschnitt 1.1 definiert, die Menge der Kurven in  $SP(1)$ , die in der Identität beginnen und deren Endpunkte keinen Eigenwert eins haben.

Da wir die Rechnungen in komplexen Koordinaten durchführen und  $N$  und  $M$  wieder wie Vektoren in  $\mathbb{C}^2$  behandeln wollen, definieren wir die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $O \in U(2)$  als Matrix bezüglich der komplexen Standardkoordinaten.

$$O(t) := (N(t), M(t)), \quad \text{d.h. } O(t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aN(t) + bM(t).$$

Wenn wir  $O(t)$  auf die zweite Koordinate von  $\mathbb{C}^2$  einschränken und  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  identifizieren, können wir  $\pi \circ O(t)$  auffassen als

$$\pi \circ O(t) : 0 \times \mathbb{C} \rightarrow \xi(\gamma(t)).$$

Dann gilt

$$T_{\gamma(t)}^{-1} = \pi \circ O(t)|_{0 \times \mathbb{C}}.$$

Wir können also  $\Phi(t)$  auch schreiben als:

$$\Phi(t) := O(t)^{-1} \pi^{-1} d\Psi_t \pi O(0)|_{0 \times \mathbb{C}}.$$

Ab nun rechnen wir in Koordinaten von  $\mathbb{C}^2$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $\xi_{\gamma(0)} = T_{\gamma(0)} \Sigma \cap J T_{\gamma(0)} \Sigma$  ist und dass  $V = 1 \in \mathbb{C}$  für den Vektor  $V$  aus Lemma 1.1.1 gilt. Der allgemeine Fall ergibt sich, wenn man  $M_0 := M(0)$  durch  $\pi e^{i\phi_0} M_0$  ersetzt, wobei  $e^{i\phi_0} = V$ .

Nun ist es mit Lemma 1.1.1 möglich, den Maslov-Index über die Änderung des Arguments von

$$O(t)^{-1} \pi^{-1} d\Psi_t M_0 : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$

zu bestimmen.

**Bemerkung.** Definieren wir die unitäre  $2 \times 2$  Matrix  $U(t)$  als

$$U(t) := \left( N(t), \pi^{-1} \frac{d\Psi_t M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_t M_0|} \right),$$

dann ist der Drehwinkel von  $O(t)^{-1} \pi^{-1} d\Psi_t M_0$  in  $\mathbb{C}$  um den Nullpunkt gleich dem Argument von  $\det(U(t))$ .

**Lemma 2.1.2.** *Es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(U(t))|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{O(t)^{-1} \pi^{-1} d\Psi_t M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_t M_0|} \Big|_{t=t_0} = if(\Pi_{JN, JN} + \Pi_{\tilde{M}, \tilde{M}}) \det(U(t)),$$

wobei für  $\gamma(t_0) = p$  gilt  $f(p) = |X(p)| = |\dot{\gamma}(t_0)| = \frac{2}{\langle p, N \rangle}$ .  $\tilde{M}(p)$  ist ein Vektor in  $T_p \Sigma \cap J T_p \Sigma$  gegeben durch  $\frac{\pi^{-1} d\Psi_t M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_t M_0|}$ .

*Beweis.* Man beachte, dass wir Vektoren in den Argumenten der zweiten Fundamentalform  $\Pi$  weiterhin als reelle Vektoren in  $\mathbb{R}^4$  auffassen. Vereinfachend für die Rechnung ist, dass

$$O^{-1} \circ \pi^{-1} = \pi_2 \circ O^{-1},$$

wobei  $\pi_2$  die Projektion auf die zweite Komponente von  $\mathbb{C}^2$  ist.

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{O(t)^{-1} \pi^{-1} d\Psi_t M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_t M_0|} \Big|_{t=t_0} &= \pi_2 \partial_t O(t)^{-1} \Big|_{t=t_0} \frac{d\Psi_{t_0} M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} \\ &\quad + \pi_2 O(t_0)^{-1} \partial_t \frac{1}{|\pi^{-1} d\Psi_t M_0|} \Big|_{t=t_0} d\Psi_{t_0} M_0 \quad (2.1) \\ &\quad + \pi_2 O(t_0)^{-1} \frac{1}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} \partial_t d\Psi_t M_0 \Big|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt

$$\begin{aligned} \pi_2 \partial_t O(t)^{-1} \Big|_{t=t_0} \frac{d\Psi_{t_0} M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} &= -\pi_2 O(t_0)^{-1} \partial_t O(t) \Big|_{t=t_0} O(t_0)^{-1} \frac{d\Psi_{t_0} M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} \\ &= -\pi_2 O(t_0)^{-1} (\partial_t N(t), \hat{M} \partial_t N(t)) \frac{O(t_0)^{-1} d\Psi_{t_0} M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} \\ &= *. \end{aligned}$$

Sei nun  $\tilde{M}(t_0) := \pi^{-1} \frac{d\Psi_{t_0} M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|}$ . Wir unterdrücken ab jetzt den Punkt  $t_0$ . Dann bilden  $\{N, \tilde{M}\}$  eine unitäre Basis von  $\mathbb{C}^2$  für alle  $t_0$ . Es gilt  $\tilde{M} = e^{i\varphi} M$ , wobei  $\varphi$  von  $t$  abhängt. Wir definieren weiter  $\tilde{N} := -\tilde{M} e^{i\varphi} \tilde{M}(N) = e^{-i\varphi} N$ . Nach Ableiten von  $O(t)$  ergibt sich in Koordinaten von  $\mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} * &= -\pi_2 O(t_0)^{-1} \begin{pmatrix} \Pi_{fJN, JN} iN & -\Pi_{fJN, \tilde{M}} \tilde{N} \\ +\Pi_{fJN, \tilde{M}} \tilde{M} & +\Pi_{fJN, J\tilde{M}} i\tilde{N} \\ +\Pi_{fJN, J\tilde{M}} i\tilde{M} & -\Pi_{fJN, JN} iM \end{pmatrix} \frac{O(t_0)^{-1} d\Psi_{t_0} M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} \\ &= ** . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{O(t_0)^{-1} d\Psi_{t_0} M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} = \begin{pmatrix} ic \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \text{ für ein } c(t_0) \in \mathbb{R}.$$

Da  $\tilde{M} = e^{i\varphi} M$  und  $O^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $O^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , folgt:

$$\begin{aligned} ** &= -\pi_2 \begin{pmatrix} i\Pi_{fJN, JN} & e^{-i\varphi}(-\Pi_{fJN, \tilde{M}} + i\Pi_{fJN, J\tilde{M}}) \\ e^{i\varphi}(\Pi_{fJN, \tilde{M}} + i\Pi_{fJN, J\tilde{M}}) & -i\Pi_{fJN, JN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ic \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ &= ce^{i\varphi}(-i\Pi_{fJN, \tilde{M}} + \Pi_{fJN, J\tilde{M}}) + ie^{i\varphi}\Pi_{fJN, JN} \end{aligned}$$

Für den dritten Term in (2.1) gilt:

$$\begin{aligned} \pi_2 O(t_0)^{-1} \frac{\partial_t d\Psi_t M_0|_{t=t_0}}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} &= \frac{\pi_2 O(t_0)^{-1}}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} \partial_t \partial_s \Psi_t(\exp_{x_0}(sM_0))|_{t=t_0, s=0} \\ &= \frac{\pi_2 O(t_0)^{-1}}{|\pi^{-1} d\Psi_{t_0} M_0|} \partial_s (f(\Psi_{t_0}(\exp_{x_0}(sM_0))) iN(\Psi(\exp_{x_0}(sM_0)))) \\ &= \pi_2 O^{-1}(t_0) \left( \partial_s f iN - f \Pi_{\tilde{M}, JN} N + f \Pi_{\tilde{M}, \tilde{M}} i\tilde{M} - f \Pi_{\tilde{M}, J\tilde{M}} \tilde{M} \right. \\ &\quad \left. - cf \Pi_{JN, JN} N + cf \Pi_{JN, \tilde{M}} i\tilde{M} - cf \Pi_{JN, J\tilde{M}} \tilde{M} \right) \\ &= ife^{i\varphi} \Pi_{\tilde{M}, \tilde{M}} - fe^{i\varphi} \Pi_{\tilde{M}, J\tilde{M}} + icfe^{i\varphi} \Pi_{JN, \tilde{M}} - cf e^{i\varphi} \Pi_{JN, J\tilde{M}} \end{aligned}$$

Die Ableitung eines Weges  $c$  in  $\mathbb{C}$ , der konstanten Betrag hat, hat immer die Form  $\dot{c} = irc$  für  $r \in \mathbb{R}$ . Daher können wir die radialen Anteile vernachlässigen und erhalten durch Aufsummieren der drei Terme aus (2.1):

$$\partial_t \det(U(t))|_{t=t_0} = if(\Pi_{JN, JN} + \Pi_{\tilde{M}, \tilde{M}}) \det(U(t_0))$$

□

Damit ergibt sich mit Lemma 1.1.1 sofort der folgende Satz.

**Satz 2.1.3.** *Sei  $\gamma$  ein geschlossener Reeborbit auf  $\Sigma$  mit Periode  $T$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_0^T |\dot{\gamma}|(\Pi_{JN, JN} + \Pi_{\tilde{M}, \tilde{M}}) dt &\in (2k\pi, 2(k+1)\pi), \text{ für } \mu(\gamma) = 2k+1, \\ \int_0^T |\dot{\gamma}|(\Pi_{JN, JN} + \Pi_{\tilde{M}, \tilde{M}}) dt &= 2k\pi \quad , \text{ für } \mu(\gamma) = 2k, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{M}(t) = \frac{\pi^{-1} d\Psi_t M_0}{|\pi^{-1} d\Psi_t M_0|}$ ,  $M_0 = O(0)V$  mit  $V$  wie in Lemma 1.1.1 gewählt.

**Bemerkung.** 1. Das Integral ist parametrisierungsunabhängig.

2. Der erste Teil des Integrals

$$\int_0^T |\dot{\gamma}| \Pi_{JN, JN} dt$$

ist genau die Wirkung der Kurve  $N : S^1 \rightarrow S^3$ .

3. Die vorangegangenen Berechnungen gelten auch für sternförmige Gebiete.

## 2.2 Knotenobstruktionen

In [Mil50] definiert Milnor den Begriff der *Beugung* von Kurven in Vektorräumen. Sei

$$\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

eine geschlossene Kurve. Dann definiere für jedes  $b \in S^3 - U$  den Wert  $m(\gamma, b)$  als die Anzahl der Maxima der Funktion

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle \gamma(t), b \rangle. \end{aligned}$$

Mit  $U$  ist die Nullmenge der Punkte in  $S^3$  bezeichnet, für die die Funktion degenerierte kritische Punkte hat. Die *Beugung*  $m(\gamma)$  von  $\gamma$  ist dann definiert als  $m(\gamma) := \min\{m(\gamma, b) | b \in S^3 - U\}$ . Nach Milnor gilt für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven  $\gamma$  weiter

$$\int_{S^1} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma(t) \right| dt \geq 2\pi m(\gamma).$$

In unserem Fall heißt das für die Länge  $l(N)$  der Kurve  $N(t)$ , wenn  $\gamma$  ein nach Bogenlänge reparametrisierter Reeb-Orbit in  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$  ist

$$\int \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma(t) \right| dt = \int \left| \frac{\partial}{\partial t} N(t) \right| dt = l(N) \geq 2\pi m(\gamma).$$

Daraus folgt der folgende Satz.

**Satz 2.2.1.** *Angenommen auf  $\partial C = \Sigma$  seien die Hauptkrümmungen entlang eines geschlossenen Reeb-Orbits  $\gamma$  mit Periode  $T$  gegeben durch  $a(t) \geq b(t) \geq c(t)$ . Für ein  $k \in \mathbb{N}$  gelte  $k(c(t) + b(t)) \geq a(t)$ , für alle  $t \in [0, T]$ . Dann folgt für diesen Reeb-Orbit:*

$$\begin{aligned} \mu(\gamma) \text{ ungerade} &\Rightarrow k(\mu(\gamma) + 1) > 2m(\gamma) \\ \mu(\gamma) \text{ gerade} &\Rightarrow k(\mu(\gamma)) \geq 2m(\gamma) \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir parametrisieren  $\gamma$  nach Bogenlänge. Im Fall, dass  $\mu(\gamma)$  ungerade ist, gilt nach Lemma 1.1.1

$$\int_0^T a dt \leq k \int_0^T b + c dt \leq k \int_0^T \Pi_{JN, JN} + \Pi_{\tilde{M}, \tilde{M}} dt < k(\mu(\gamma) + 1)\pi.$$

Es gilt aber auch

$$2\pi m(\gamma) \leq \int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial t} N(t) \right| dt \leq \int_0^T a dt,$$

d.h.

$$k(\mu(\gamma) + 1) > 2m(\gamma).$$

Der Beweis des zweiten Falles läuft analog.  $\square$

Als Korollar dazu ergibt sich:

**Korollar 2.2.2.** *Angenommen für  $\partial C = \Sigma$  seien die Hauptkrümmungen für alle  $p \in \Sigma$  gegeben durch  $a(p) \geq b(p) \geq c(p)$  und es gelte  $c + b \geq a$ . Dann hat jeder geschlossene Reeb-Orbit  $\gamma$  mit Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  die Beugung  $m(\gamma) = 1$  und ist unverknotet.*

*Beweis.* Da  $\mu(\gamma) = 3$  ist, gilt nach Satz 2.2.1  $m(\gamma) < 2$ , also  $m(\gamma) = 1$ . Dann können wir aber wie in Abschnitt 3.4 eine in  $\Sigma$  eingebettete Kreisscheibe konstruieren, die  $\gamma$  berandet. Damit ist  $\gamma$  unverknotet.  $\square$

Da nach [Eke90] der Reeb-Orbit minimaler Wirkung auf den hier betrachteten Körpern Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  hat, muss dieser Orbit unverknotet in  $\Sigma$  sein.



## Kapitel 3

# Minimale und symplektische Scheiben

Sei  $C$  wie bisher ein beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand  $\Sigma$ . In diesem Kapitel beschreiben wir unter welchen Umständen minimale Flächen in  $C$ , die von einem Reeb-Orbit in  $\Sigma$  berandet werden, symplektisch sind. Das Hauptresultat lautet:

**Theorem 3.0.3.** *Sei  $C \subset \mathbb{C}^2$  ein beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand. Sei  $\Sigma := \partial C$  und  $\lambda_0$  die Standardkontaktstruktur auf  $\Sigma$ . Weiter gelte für die Hauptkrümmungen  $a \geq b \geq c$  von  $\Sigma$ , dass  $b + c \geq a$ . Dann berandet jeder Reeb-Orbit  $\gamma$  mit Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  eine eingebettete, symplektische, minimale Kreisscheibe in  $C$ .*

Außerdem geben wir in Abschnitt 3.4 eine hinreichende Bedingung dafür an, dass Reeb-Orbiten  $\gamma$  auf dem Rand beliebiger beschränkter, streng konvexer Körper die Selbstverlinkungszahl  $lk(\gamma) = -1$  haben. Für die oben betrachtete Klasse konvexer Körper ergibt sich dann die positive Antwort auf die Frage, ob der Orbit minimaler Wirkung die Selbstverlinkungszahl  $lk = -1$  hat. Die Sätze 3.3.3 und 3.3.4 ergeben zusätzlich für beliebige konvexe Körper, dass die Selbstverlinkungszahl  $lk(\gamma) = -1$  eine notwendige Bedingung für die Existenz einer eingebetteten, symplektischen Scheibe ist, die  $\gamma$  berandet.

Zum Beweis von Theorem 3.0.3 benötigen wir global minimale Kreisscheiben. Solche minimalen Scheiben, berandet von einer Jordankurve  $\gamma$ , sind stetige Abbildungen

$$f : (D^2, S^1) \rightarrow (\mathbb{R}^4, \gamma)$$

mit minimaler Oberfläche. Das Bild von  $f$  hat notwendigerweise mittlere Krümmung  $H = 0$ . Diese Abbildungen erfüllen bezüglich einer geeigneten Parametrisierung die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta f &= 0 \\ |f_x|^2 - |f_y|^2 &= 0 = \langle f_x, f_y \rangle. \end{aligned}$$

Weiter ist  $f|_{S^1}$  eine orientierte Parametrisierung von  $\gamma$ . Siehe dazu [Str88]. Am Ende des Abschnitts benötigen wir folgende Existenzaussage.

**Theorem 3.0.4 ([Str88], Theorem 4.10).** *Sei  $\gamma$  eine rektifizierbare Jordankurve in  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert eine Lösung  $f$  der Minimalflächengleichung, die eine Kreisscheibe mit absolut minimaler Fläche parametrisiert.*

Der Regularitätssatz [Str88, Theorem 5.1] garantiert, dass minimale Flächen, die von einer glatten Kurve berandet werden, eine glatte Parametrisierung zulassen. Diese Parametrisierungen sind a priori nicht notwendigerweise Immersionen. Nach einem Theorem von Ekholm, White und Wienholtz können wir für die hier betrachteten Fälle jedoch Einbettungen als Parametrisierung wählen.

Für den Beweis von Theorem 3.0.3 modifizieren wir zunächst die Beweise und Ergebnisse von [Web84],[Web86] und [Wol89], die ihre Resultate für geschlossene Flächen in Kähler-Mannigfaltigkeiten bewiesen haben.

Wir behalten der Übersicht wegen die Notation von [Web84] bei. Sei

$$f : (D^2, S^1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \gamma)$$

eine minimale Immersion, das heißt die immersierte Parametrisierung einer minimalen Fläche, die die Minimalflächengleichungen erfüllt. Ein *komplexer Punkt*  $p \in D^2$  ist ein Punkt, in dem  $f_*T_pD^2 = Jf_*T_pD^2$  gilt. Wir unterscheiden bei komplexen Punkten zwischen holomorphen und antiholomorphen Punkten. Ein komplexer Punkt  $p$  heißt *holomorph*, wenn die durch  $J$  auf  $f_*T_pD^2$  induzierte Orientierung mit der ursprünglichen übereinstimmt. Ansonsten heißt  $p$  *antiholomorph*. Nach [Web84, Proposition 2] ist eine Minimalfläche entweder holomorph, antiholomorph oder hat nur isolierte komplexe Punkte.

Von nun an sei  $f$  weder holomorph, noch antiholomorph und  $p$  sei ein komplexer Punkt. Wir stellen zunächst lokale Betrachtungen um diesen isolierten, komplexen Punkt  $p$  an.

Sei  $\tilde{V} := f^*T\mathbb{C}^2$  das Tangentialbündel von  $\mathbb{C}^2$  über der Scheibe  $D^2$  mit komplexer Multiplikation  $J$ . Dann zerfällt  $\tilde{V} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  in  $+i, -i$  Eigenbündel zu  $J$ , d.h.  $\tilde{V} \otimes \mathbb{C} = V' + V''$ , wobei  $V'' = \overline{V'}$  und  $J = iId$  auf  $V'$ . Wir betrachten nun die Bündel  $\tilde{V}, \tilde{V} \otimes \mathbb{C}$  und  $V := TD^2 \subset \tilde{V}$  über  $D^2$ , mit den entsprechenden von  $\mathbb{C}^2$  und  $f$  induzierten Metriken. Wie Webster wählen wir um  $p$  einen orthonormalen Rahmen  $e_1, \dots, e_4$  von  $\tilde{V}$  mit

$$Je_1(p) = e_2(p), Je_3(p) = e_4(p).$$

Weiter gelte

$$\text{span}(e_1, e_2) = V \text{ und } \text{span}(e_3, e_4) = ND^2,$$

wobei  $ND^2$  das Normalenbündel zu  $V$  in  $\tilde{V}$  ist. Man beachte hier, dass die durch  $e_1, e_2$  gegebene Orientierung von  $V$  in antiholomorphen Punkten nicht mit der ursprünglichen übereinstimmt. Seien weiter

$$E_j := \frac{1}{2}(e_j - ie_{j+1}), \quad j = 1, 3.$$

Wir können dann einen unitären Rahmen  $v_1, v_2$  in  $V'$  wählen, sodass gilt

$$E_1 = qv_1 + r\overline{v_2}, \quad E_2 = sv_2 + t\overline{v_1},$$

mit

$$|q|^2 + |r|^2 = |s|^2 + |t|^2 = 1$$

und

$$q(p) = s(p) = 1, r(p) = t(p) = 0,$$

das heißt  $E_1(p) = v_1(p)$  und  $E_2(p) = v_2(p)$ . Da  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  Minimalfläche ist, gilt desweiteren, wie in [CW83] gezeigt, dass sich  $r(z)$  in der Nähe von  $p$  schreiben lässt als

$$r(z) = (z - p)^k g(z), \quad \text{für ein } k > 0, \quad (3.1)$$

wobei  $g(z) \neq 0$ . Sei dann der *Index eines komplexen Punktes*  $p$  unabhängig davon, ob  $p$  holomorph oder antiholomorph ist, definiert als

$$\text{ind}(p) := -k.$$

Wenn  $\text{ind}(p) = -k$  ist, sagen wir  $p$  hat die *Vielfachheit*  $k$ . Man beachte, dass der Index immer negativ ist.

### 3.1 Berechnung der relativen Euler-Klasse

Sei wie oben

$$f : (D^2, S^1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \gamma)$$

eine minimale Immersion mit isolierten komplexen Punkten. Sei  $w \in \Gamma(V)$  ein Schnitt mit isolierten Nullstellen im Tangentialbündel  $TD^2 = V \subset \tilde{V} = f^*T\mathbb{C}^2$ , sodass die Nullstellen von  $w$  und die komplexen Punkte disjunkt sind. Wir vergleichen nun die Indizes von  $w$  und  $\pi_N Jw$ , wobei  $\pi_N : \tilde{V} \rightarrow ND^2$  die orthogonale Projektion auf das Normalenbündel  $ND^2$  zu  $V$  in  $\tilde{V}$  ist.

Sei nun  $x$  eine Nullstelle von  $w$  und somit auch eine Nullstelle von  $\pi_N Jw$ . Dann wissen wir nach [CT97], dass  $\text{ind}_x(w) = -\text{ind}_x(\pi_N Jw)$ , wobei der Index in diesem Fall die Windungszahl des Vektorfeldes bezüglich einer orientierten Trivialisierung entlang eines in positiver Richtung durchlaufenen, kleinen Kreises um  $x$  ist. Die Betrachtung der Nullstellen ist notwendig, da wir später mit Polarkoordinaten auf  $D^2$  arbeiten wollen.

Sei weiter  $p$  ein komplexer Punkt von  $D^2$ . Wir wählen nun um  $p$  einen Orthonormalrahmen  $e_1, \dots, e_4$  von  $\tilde{V}$  wie oben, sodass  $e_1 = w$ . Wie in [Web84] können wir in einer Umgebung von  $p$  das Normalenbündel  $ND^2$  durch  $\text{span}\{Re(v_2), Im(v_2)\}$  approximieren. Dann gilt wegen

$$w = 2Re(qv_1 + r\bar{v}_2), \quad Jw = 2Re(iv_1 - ir\bar{v}_2),$$

dass

$$\pi_N J e_1 = 2Re(-ir\bar{v}_2).$$

Daraus folgt, dass  $\text{ind}_p(\pi_N Jw)$  bezüglich der lokalen Orientierungen von  $V = TD^2$  und  $ND^2$ , die durch  $\{e_1, e_2\}$  und  $\{e_3, e_4\}$  gegeben sind, gleich der Windungszahl der Abbildung

$$z \mapsto \bar{r}(z)$$

entlang eines Kreises um  $p$  ist. Nach (3.1) wissen wir, dass  $\overline{r(z)} = (\overline{z-p})^k \overline{g}(z)$  und somit  $\text{ind}_p(\pi_N Jw) = \text{ind}(p) = -k < 0$  ist bezüglich der lokalen Orientierungen, die durch die  $e_i$  gegeben sind. Global wird  $ND$  so orientiert, dass die Orientierung von  $V + ND^2$  mit der von  $\tilde{V}$  übereinstimmt. In holomorphen Punkten stimmen alle Orientierungen mit den lokalen überein. In antiholomorphen Punkten sind die globalen Orientierungen von  $V$  und  $ND^2$  umgekehrt zu den lokalen. Da sich aber in diesem Fall jeweils die lokalen und globalen Orientierungen sowohl von  $V$  als auch von  $ND$  unterscheiden, bleibt die Gleichung  $\text{ind}_p(\pi_N Jw) = \text{ind}(p) = -k$  bei antiholomorphen Punkten auch in den globalen Orientierungen richtig. Es gilt demnach für den Index  $\text{ind}_p(\pi_N Jw) = \text{ind}(p)$  in jedem komplexen Punkt  $p$  unabhängig davon, ob  $p$  holomorph oder antiholomorph ist.

**Definition 3.1.1.** Sei  $W$  ein orientiertes, reell zweidimensionales Bündel über  $D^2$ . Wir definieren die Windungszahl  $\text{wind}_W(w)$  eines Schnittes  $w$  ohne Nullstelle in  $W|_{S^1}$  als dessen Umlaufzahl entlang  $S^1$  bezüglich einer der Orientierung entsprechenden Trivialisierung von  $W$  über  $D^2$ .

Mit der lokalen Betrachtung der komplexen Punkte folgt:

**Satz 3.1.2.** Sei  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$  eine immersierte Minimalfläche und sei  $w \in \Gamma(V)$ ,  $V = TD^2 \subset f^*T\mathbb{C}^2$  ein Vektorfeld mit isolierten Nullstellen, sodass diese Nullstellen und die komplexen Punkte von  $f$  disjunkt sind. Außerdem sollen auf  $S^1 = \partial D^2$  weder komplexe Punkte noch Nullstellen von  $w$  liegen. Dann gilt:

$$\text{wind}_V(w) + \text{wind}_{ND^2}(\pi_N Jw) = -K,$$

wobei  $K$  die Anzahl der komplexen Punkte von  $f$  ist, gezählt mit der oben definierten Vielfachheit.  $K$  setzt sich zusammen aus der Anzahl  $P$  der holomorphen Punkte und der Anzahl  $Q$  der antiholomorphen Punkte, d.h.  $K = P + Q$ .

*Beweis.* Die Windungszahl eines Vektorfeldes ist gleich der Summe der Indizes der Nullstellen. Dies sieht man, wenn man eine Triangulierung wählt, sodass keine Nullstelle auf dem Rand eines Dreiecks und höchstens eine Nullstelle im Inneren liegt. Auf den Rändern der Dreiecke ist die Windungszahl gleich null, wenn keine Nullstelle im Inneren ist. Sonst ist laut Definition des Index die Windungszahl gleich dem Index der Nullstelle. Daher und wegen  $\text{ind}_x(w) = -\text{ind}_x(\pi_N Jw)$  für Nullstellen  $x$  von  $w$  gilt:

$$\text{wind}_V(w) + \text{wind}_{ND^2}(\pi_N Jw) = \sum_{p_i} \text{ind}_{p_i}(\pi_N Jw) = \sum_i -k_i,$$

wobei  $k_i$  die oben definierten Vielfachheiten der komplexen Punkte  $p_i$  sind.  $\square$

## 3.2 Berechnung der relativen Chern-Klasse

Wir können zwar nun die totale Anzahl komplexer Punkte bestimmen, leider aber nicht zwischen holomorphen und antiholomorphen Punkten unterscheiden. Dazu bedienen wir uns der, wie in [Web86] benutzten, Berechnung von Chernklassen. Sei  $V^c = V \otimes \mathbb{C}$  die Komplexifizierung des Tangentialbündels  $TD^2$  und  $V'$  wie oben das holomorphe Unterbündel von  $\tilde{V} \otimes \mathbb{C}$ ,  $\tilde{V} = f^*T\mathbb{C}^2$ . Wie bei den relativen Eulerklassen möchten wir hier Indizes von Schnitten in komplex

eindimensionalen Bündeln vergleichen. Hier werden dies Schnitte in den Determinantenbündeln  $V^c \wedge V^c$  und  $V' \wedge V'$  sein.

Sei  $\pi_{V'} : \tilde{V} \otimes \mathbb{C} \rightarrow V'$  die komplex lineare, orthogonale Projektion auf das holomorphe Unterbündel von  $\tilde{V} \otimes \mathbb{C}$ . Eingeschränkt auf  $V \otimes \mathbb{C}$  ist diese Projektion außerhalb der komplexen Punkte ein Isomorphismus.

Betrachte nun Schnitte  $w_1, w_2$  in  $V^c$  und  $\tilde{w}_1 := \pi_{V'} w_1, \tilde{w}_2 := \pi_{V'} w_2$  in  $V'$ , sodass der Schnitt  $w_1 \wedge w_2$  in  $V^c \wedge V^c$  keine Nullstellen hat. Sei nun  $p$  ein komplexer Punkt von  $f$ . Seien weiterhin  $w_1, w_2$  so gewählt, dass  $w_1(p) \in V^c \cap V'$  und  $w_2(p) \in V^c \cap V''$ . Wir benötigen wie zuvor einige lokale Betrachtungen um die komplexen Punkte. Wir wählen wie oben Rahmen  $E_j, v_j, j = 1, 2$  um  $p$ , sodass

$$V = \text{span}(\text{Re}(E_1), \text{Im}(E_1)).$$

Wir können annehmen, dass

$$\begin{aligned} E_1 &= qv_1 + r\bar{v}_2, & q(p) = 1, r(p) = 0 \\ E_2 &= sv_2 + t\bar{v}_1, & s(p) = 1, t(p) = 0. \end{aligned}$$

Weiter nehmen wir an, dass

$$w_1 = E_1, w_2 = E_2, \tilde{w}_1 = qv_1, \tilde{w}_2 = \bar{r}v_2.$$

Da  $w_1 \wedge w_2 \neq 0$ , folgt  $\text{ind}_p(w_1 \wedge w_2) = 0$ . Außerdem gilt nach der obigen Formel für  $\tilde{w}_2$ , dass

$$\text{ind}_p(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2) = \pm \text{ind}_p(q\bar{r}v_1 \wedge v_2) = \pm \text{wind}_{\mathbb{C}}(z \mapsto \bar{r}(z)).$$

Es spielt eine wichtige Rolle, ob die durch  $\{\text{Re}(E_1), \text{Im}(E_1)\}$  gegebene lokale Orientierung von  $TD^2$  mit der globalen übereinstimmt, da die Orientierung von  $V' \wedge V'$  unabhängig davon ist. Daher gilt

$$\text{ind}_p(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2) = -\text{ind}(p),$$

falls  $p$  ein antiholomorpher Punkt ist, und

$$\text{ind}_p(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2) = \text{ind}(p),$$

falls  $p$  ein holomorpher Punkt ist. Für die weiteren Rechnungen ist ebenfalls wichtig, dass

$$\text{ind}_p(a \wedge b) = \text{ind}_p(b \wedge a) \quad \text{für } a, b \in \Gamma(V^c) \text{ oder } a, b \in \Gamma(V').$$

Das heißt, wir können auch  $w_1(p) \in V^c \cap V''$  und  $w_2(p) \in V^c \cap V'$  wählen.

Seien nun  $w_1, w_2$  Schnitte in  $V^c$ , sodass  $w_1 \wedge w_2$  nullstellenfrei ist und dass die komplexen Punkte nicht auf dem Rand liegen. Es gelte weiterhin in komplexen Punkten  $p$ , dass  $w_1 \in V', w_2 \in V''$  oder umgekehrt. Seien  $p_i$  die holomorphen und  $q_i$  die antiholomorphen Punkte. Dann gilt

$$\sum_{q_i} \text{ind}_{q_i}(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2) + \sum_{p_i} \text{ind}_{p_i}(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2) = -\sum_{p_i} k_{p_i} + \sum_{q_i} k_{q_i},$$

wobei  $k_{p_i}$  die Vielfachheiten der holomorphen und  $k_{q_i}$  die der antiholomorphen Punkte bezeichnet. Da die Summe der Indizes eines Vektorfeldes auf einer Kreisscheibe gleich der Windungszahl auf dem Rand ist, gilt folgender Satz.

**Satz 3.2.1.** *Sei  $w_1 \wedge w_2$  wie oben, dann gilt:*

$$\text{wind}_{V' \wedge V'}(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2) = Q - P,$$

wobei  $P$  die Anzahl holomorpher und  $Q$  die Anzahl antiholomorpher Punkte von  $f$  gezählt mit Vielfachheit sind.

### 3.3 Die symplektische Scheibe

Sei wieder  $C \subset \mathbb{C}^2$  ein beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand  $\Sigma$ . Ab diesem Abschnitt bezeichnen wir mit  $\xi \rightarrow \Sigma$  das komplexe Unterbündel  $\xi_p = JT_p\Sigma \cap T_p\Sigma$  von  $T\Sigma$ . Dies ist nicht wie in den vorigen Kapiteln die durch die kanonische Eins-Form  $\lambda_0$  induzierte Kontaktstruktur. Allerdings ist die orthogonale Projektion

$$\ker(\lambda_0(p)) \rightarrow \xi_p$$

ein orientierungserhaltender Isomorphismus für alle  $p \in \Sigma$ . Wir betrachten einen geschlossenen Reeb-Orbit  $\gamma$ . Sei  $N(t)$  die äußere Flächennormale an  $\Sigma$  in  $\gamma(t)$  und sei  $M(t)$  der wie in Abschnitt 2.1 definierte dazu komplex orthogonale Vektor in  $S^3$ .

In diesem Abschnitt betrachten wir globale Minimalflächen, d.h. Minimalflächen, deren Rand ein Reeb-Orbit  $\gamma$  ist und die absolut flächenminimierend sind. Diese haben die Eigenschaft, dass sie nach dem Maximumprinzip in  $C$  liegen müssen und niemals tangential an  $\Sigma$  sein können. Wir können nun den folgenden Satz beweisen.

**Satz 3.3.1.** *Sei  $C$  ein streng konvexer Körper mit glattem Rand in  $\mathbb{C}^2$  und  $\gamma$  ein Reeb-Orbit auf  $\partial C$ . Sei weiter*

$$f : (D^2, S^1) \rightarrow (C, \gamma)$$

eine immersierte, nicht holomorphe, globale Minimalfläche. Wenn wir mit

$$\pi_N : \xi \rightarrow ND^2$$

die Projektion des komplexen Unterbündels  $\xi$  von  $T\Sigma$  auf das Normalenbündel  $ND^2$  von  $f$  entlang  $\gamma$  bezeichnen und mit  $Q$  die Anzahl der antiholomorphen Punkte von  $f$ , dann gilt:

$$-\text{wind}_{ND}(\pi_N M) - 1 = 2Q$$

*Beweis.* Sei

$$f : (D^2, S^1) \rightarrow (C, \gamma)$$

eine minimale, immersierte Kreisscheibe, parametrisiert auf  $D^2 \subset \mathbb{C}$ . Da  $\gamma$  ein Reeb-Orbit ist, existiert eine Umgebung des Randes von  $D^2$ , auf dem keine antiholomorphen Punkte liegen können. Wir können ebenfalls annehmen, dass auch keine holomorphen Punkte auf  $S^1$  liegen. Wenn nicht, können wir  $f$  auf  $D^2_{1-\epsilon}$  für ein beliebig kleines  $\epsilon > 0$  einschränken, sodass das Gewünschte gegeben ist. Für die folgenden Rechnungen ist das keine Einschränkung.  $TD^2$  ist global trivialisiert und orientiert durch die Basis  $\partial_x, \partial_y$ .  $TD^2 \otimes \mathbb{C}$  erhält damit die globale, orientierte Trivialisierung  $\partial_x - i\partial_y, \partial_x + i\partial_y$ .

Wir wollen nun noch  $\mathbb{C}^2|_\gamma$  geeignet trivialisieren. Seien  $N(t)$  und  $M(t)$  wie in Abschnitt 2.1 definiert. Sei weiter  $J$  die komplexe Struktur auf  $\mathbb{C}^2$ . Homotopieren wir  $\gamma$  in  $\Sigma$  zu einem Punkt, so erhalten wir eine Homotopie der Kurve der Rahmen

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow SO(4) \\ t &\mapsto (N(t), JN(t), M(t), JM(t)) \end{aligned}$$

zu einem Punkt in  $SO(4)$ . Daher lässt sich die Trivialisierung  $\{N, JN, M, JM\}$  von  $\tilde{V}|_{S^1} = \mathbb{C}^2|_\gamma$  auf die Kreisscheibe fortsetzen. Somit erhalten wir auch die fortsetzbare Trivialisierung  $\{N - iJN, M - iJM\}$  von  $V'$  auf  $S^1$  und die Trivialisierungen der entsprechenden Determinantenbündel.

Seien  $\partial_\phi, \partial_t$  Polarkoordinaten mit Betrag eins bezüglich der euklidischen Metrik auf  $D^2 - \{0\}$ .

Wir berechnen zuerst  $Q-P$  mit Hilfe von Satz 3.2.1. Dazu betrachten wir wieder  $TD^2 = V \subset \tilde{V} = f^*T\mathbb{C}^2$ . Die Inklusion von  $TD^2$  in  $\tilde{V}$  ist dabei kanonisch durch das Differential von  $f$  gegeben. Seien

$$w_1, w_2 \in \Gamma(V \otimes \mathbb{C})$$

außerhalb einer Umgebung der Null definiert durch

$$w_1 := f_*(\partial_r - i\partial_\phi), \quad w_2 := f_*(\partial_r + i\partial_\phi).$$

Es gilt auf  $S^1$  in jedem Punkt  $e^{i\phi}$

$$\begin{aligned} \partial_r &= \sin(\phi)\partial_x + \cos(\phi)\partial_y, \\ \partial_\phi &= -\cos(\phi)\partial_x + \sin(\phi)\partial_y \end{aligned}$$

und daher

$$(\partial_r - i\partial_\phi) \wedge (\partial_r + i\partial_\phi) = 2i\partial_r \wedge \partial_\phi = 2i\partial_x \wedge \partial_y.$$

Somit ist die Windungszahl von  $w_1 \wedge w_2|_{S^1}$  in  $V^c \wedge V^c$  gleich Null. Daher lassen sich  $w_1$  und  $w_2$  glatt in die Null fortsetzen, sodass  $w_1 \wedge w_2$  nullstellenfrei ist und  $w_1, w_2$  die in Satz 3.2.1 geforderten Bedingungen erfüllen. Es existieren also keine komplexen Punkte auf dem Rand und in komplexen Punkten gilt  $w_1 \in V^c \cap V', w_2 \in V^c \cap V''$  oder umgekehrt, da  $f$  konform ist.

Nun gilt weiter, dass  $f_*\partial_\phi|_\gamma = c\dot{\gamma}$ , wobei  $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Sollten wir den Definitionsbereich von  $f$  wegen komplexer Punkte auf dem Rand verkleinert haben, können wir die Trivialisierung von  $\tilde{V}$  so wählen, dass immer noch  $f_*\partial_\phi|_{S^1-\epsilon} = cJN$  gegeben ist und die folgenden Rechnungen analog laufen. Wir rechnen o.B.d.A mit  $c \equiv 1$  weiter. Die äußere Flächennormale  $N_D := f_*\partial_r$  lässt sich auf  $S^1$  darstellen als:

$$N_D := f_*\partial_r = n_1N + n_2M + n_3JM \tag{3.2}$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= \pi_{V'}(n_1N + n_2M + n_3JM - i\dot{\gamma}) \\ &= (1 + n_1)(N - iJN) + (n_2 + in_3)(M - iJM), \\ \tilde{w}_2 &= \pi_{V'}(n_1N + n_2M + n_3JM + i\dot{\gamma}) \\ &= (-1 + n_1)(N - iJN) + (n_2 + in_3)(M - iJM), \end{aligned}$$

wobei auf  $S^1$  gilt, dass  $n_2 + in_3 \neq 0$ , weil es keine komplexen Punkte auf  $S^1$  gibt. Da  $f$  globale Minimalfläche ist, gilt außerdem  $n_1|_{S^1} > 0$ . Daraus folgt dann

$$\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2 = 2(n_2 + in_3)(N - iJN) \wedge (M - iJM).$$

Mit den oben genannten Trivialisierungen erhalten wir

$$\text{wind}_{V' \wedge V'}(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2) = \text{wind}_{\mathbb{C}}(n_2 + in_3).$$

Mit Satz 3.2.1 folgt

$$Q - P = \text{wind}_{V' \wedge V'}(\tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2|_{S^1}) = \text{wind}_{\mathbb{C}}(n_2 + in_3). \quad (3.3)$$

Nun werden wir  $-(P + Q)$  mittels Satz 3.1.2 berechnen. Wir verwenden die obigen Trivialisierungen von  $TD^2$  und  $\tilde{V}$  weiter. Desweiteren wissen wir, dass die orthogonale Projektion von  $ND^2|_{\gamma}$  auf  $\xi$  ein Isomorphismus ist, da globale Minimalflächen niemals tangential an einen streng konvexen Körper sein können. Wir ziehen daher die Trivialisierung  $\{M, JM\}$  von  $\xi|_{\gamma}$  auf  $ND|_{S^1}$  zurück. Noch ist nicht klar, ob sich diese Trivialisierung auf ganz  $D^2$  fortsetzen lässt. Um Satz 3.1.2 anwenden zu können, betrachten wir den Schnitt  $w := f_*\partial_\phi$  in  $V$  außerhalb einer Umgebung der Null und setzen ihn geeignet glatt in die Null fort. Auf  $S^1$  gilt dann erneut  $w = \dot{\gamma}$  bis auf positive Konstante. Sei  $\pi_N : \tilde{V} \rightarrow ND^2$  die orthogonale Projektion auf das Normalenbündel. Wir wollen nun  $\pi_N Jw \in \Gamma(ND^2)$  betrachten. Wie in (3.2) schreiben wir die äußere Flächennormale  $N_D = f_*\partial_r$  als

$$N_D = n_1N + n_2M + n_3JM,$$

wobei  $n_1$  und  $n_2 + in_3$  wie oben auf  $S^1$  nicht verschwinden. Dann gilt aber

$$Jw|_{S^1} = -N = \frac{1}{n_1}(N_D - n_2M - n_3JM).$$

Es spielt keine Rolle, ob wir die Umlaufzahl von  $\pi_N Jw = -\frac{1}{n_1}(n_2\pi_N M + n_3\pi_N JM)$  in  $ND$  bezüglich der Projektion von  $\{M, JM\}$  auf  $ND$  berechnen oder einfach die Umlaufzahl von  $-\frac{1}{n_1}(n_2M + n_3JM)$  bezüglich  $\{M, JM\}$  in  $\xi$  bestimmen. Demnach gilt

$$\text{wind}_{ND}(\pi_N Jw) = \text{wind}_{\mathbb{C}}(n_2 + in_3) + \text{wind}_{ND}(\pi_N M).$$

Für die Windungszahl von  $w$  in  $V$  gilt natürlich  $\text{wind}_V(w) = 1$ . Wir erhalten

$$-(Q+P) = \text{wind}_V(w) + \text{wind}_{ND}(\pi_N Jw) = 1 + \text{wind}_{\mathbb{C}}(n_2 + in_3) + \text{wind}(M), \quad (3.4)$$

wobei  $\text{wind}(M) := \text{wind}_{ND}(\pi_N M)$  die Windungszahl der Projektion von  $M$  auf das Normalenbündel  $ND^2$  ist.

Damit folgt aus (3.3) und (3.4), dass

$$2Q = -1 - \text{wind}(M) \quad (3.5)$$

und

$$2P = -1 - 2 \text{wind}(n_2 + in_3) + \text{wind}(M). \quad (3.6)$$

□

**Satz 3.3.2.** *Sei  $C \subset \mathbb{C}^2$  ein streng konvexer Körper mit glattem Rand,  $\gamma$  ein Reeb-Orbit auf  $\partial C$  und  $f : (D^2, S^1) \rightarrow (C, \gamma)$  eine immensierte globale Minimalfläche, sodass  $\text{wind}_{ND}(\pi_N M) = -1$ . Dann ist  $f$  symplektisch.*

*Beweis.* Wenn  $f$  holomorph ist, sind wir fertig. Antiholomorph kann  $f$  nicht sein, da in einer Umgebung von  $\gamma$  keine antiholomorphen Punkte liegen können. Wir gehen daher davon aus, dass  $f$  isolierte komplexe Punkte hat. Für den Beweis folgen wir den Ausführungen in [CW83] und [Wol89]. Sei

$$f : (D^2, S^1) \rightarrow (C, \gamma)$$

die minimale Immersion und definiere

$$\begin{aligned} j : TD^2 &\rightarrow TD^2 \\ \partial_x &\mapsto \partial_y \\ \partial_y &\mapsto -\partial_x \end{aligned}$$

die komplexe Struktur auf  $TD^2$ . Wir definieren eine  $(1,0)$ -Form  $\Phi \in \Gamma(TD^{2*} \otimes \mathbb{C})$ , sodass

$$ds^2 = \Phi \circ \bar{\Phi}$$

die durch  $f$  auf  $TD^2$  induzierte Metrik ist. Wie in [CW83] wählen wir einen unitären  $(1,0)$ -Korahmen  $\{\omega_1, \omega_2\}$  in  $T^*\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}$ , sodass auf  $TD^2$  gilt

$$f^* \omega_1 = \cos \frac{\alpha}{2} \Phi, \quad f^* \omega_2 = \sin \frac{\alpha}{2} \bar{\Phi},$$

wobei  $\alpha : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  außerhalb komplexer Punkte von  $f$  differenzierbar und in den komplexen Punkten stetig ist. Es gilt dann:

$$ds^2 = f^*(\omega_1 \circ \bar{\omega}_1 + \omega_2 \circ \bar{\omega}_2)$$

Außerdem gilt für die symplektische Form  $\omega_0$  und die induzierte Volumenform  $\frac{i}{2} \Phi \wedge \bar{\Phi}$  von  $TD^2$ :

$$f^* \omega_0 = f^* \left( \frac{i}{2} (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2) \right) = \frac{i}{2} \cos(\alpha) \Phi \wedge \bar{\Phi}$$

Da  $f$  konform und damit orientierungserhaltend ist, genügt es zu zeigen, dass  $\cos(\alpha) > 0$ , d.h.  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ . Wir definieren dazu wie in [Wol89] die Funktion

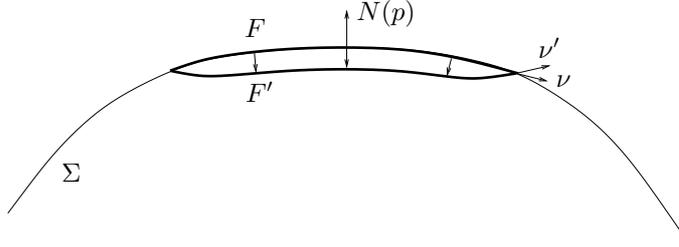
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \ln \left( \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Seien  $\{p_i\}$  die komplexen Punkte der minimalen Scheibe. Nach Wolfson gilt dann auf  $D^2 - \{p_i\}$

$$\Delta(u \circ \alpha) \Phi \wedge \bar{\Phi} = \partial \bar{\partial}(u \circ \alpha) = -i Ric = 0,$$

wobei  $Ric$  die Riccifform auf  $\mathbb{C}^2$  ist und verschwindet. Damit ist

$$u \circ \alpha : D^2 - \{p_i\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Abbildung 3.1: Die Flächen  $F$  und  $F'$ 

eine harmonische Funktion. Aufgrund der Tatsachen, dass die Scheibe am Rand symplektisch ist und dass es keine antiholomorphen Punkte gibt, gilt  $\alpha|_{S^1 \cup \{p_i\}} \in [0, \frac{\pi}{2})$ . Da  $u$  monoton in  $\alpha$  ist und  $u \circ \alpha$  sowohl sein Maximum als auch sein Minimum auf dem Rand annimmt, liegen die Extrema von  $\alpha$  ebenfalls auf dem Rand. Somit gilt  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$  auf ganz  $D^2$ . Dann ist die Scheibe aber symplektisch positiv.  $\square$

Wir können auch die folgende Umkehraussage des obigen Satzes treffen:

**Satz 3.3.3.** *Sei  $\gamma$  ein Reeborbit auf  $\Sigma = \partial C$  und  $u : (D^2, S^1) \rightarrow (C, \gamma)$  eine immensierte, symplektische Scheibe. Sei  $\text{wind}(M)$  die Windungszahl des Vektors  $M \in \Gamma(\xi|_\gamma)$  entlang  $\gamma$  bezüglich der Trivialisierung von  $\xi|_\gamma$ , deren Projektion auf das Normalenbündel von  $u$  sich auf ganz  $D^2$  fortsetzen lässt. Dann gilt  $\text{wind}(M) = -1$ .*

*Beweis.* Sei  $\hat{M} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  die in Abschnitt 2.1 definierte,  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Da  $\hat{M}^2 = -id_{\mathbb{C}^2}$ , definiert  $\hat{M}$  eine komplexe Struktur auf  $\mathbb{C}^2$ . Wir betrachten nun die komplexe Mannigfaltigkeit  $(\mathbb{C}^2, \hat{M})$ . Eine symplektische Scheibe in  $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$  hat keine Lagrangeschen Punkte und somit auch keinen komplexen Punkt in  $(\mathbb{C}^2, \hat{M})$ . Wir betrachten wie im obigen Abschnitt bei der Berechnung der relativen Eulerklasse die Bündel  $V := TD^2$  und  $ND^2$  in  $f^*T\mathbb{C}^2$ . Sei  $\partial\phi$  wie oben. Dann ist  $u_*\partial\phi|_{S^1} = c\dot{\gamma}$  mit  $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Somit gilt

$$\hat{M}u_*\partial\phi = \hat{M}\dot{\gamma} = -cJM.$$

Da  $u$  keine komplexen Punkte enthält, ist die Abbildung  $\pi_N \circ \hat{M} : V \rightarrow ND^2$  ein Isomorphismus, der Trivialisierungen in Trivialisierungen überführt. Somit ist die Windungszahl von  $\partial\phi$  in  $TD^2$  bis auf ein Vorzeichen gleich der Windungszahl von  $\pi_N JM$  in  $ND^2$ . Da, wie oben bereits verwendet,  $\pi_N \circ \hat{M}$  orientierungsumkehrend ist, gilt daher  $\text{wind}_{ND}(\pi_N JM) = -1$ . Somit ist dann aber  $\text{wind}(M) = -1$ .  $\square$

Um Theorem 3.0.3 beweisen zu können, müssen wir noch eine Relation zwischen der Windungszahl  $\text{wind}(M)$  von  $M$  und der Selbstverlinkungszahl  $\text{lk}(\gamma)$  von  $\gamma$  zeigen. Die Selbstverlinkungszahl ist wie in Abschnitt 1.3 definiert.

**Satz 3.3.4.** *Sei  $F : D^2 \rightarrow \Sigma = \partial C$  eine Seifert-Fläche zu  $\gamma$  und  $f : (D^2, S^1) \rightarrow (C, \gamma)$  eine eingebettete Minimalfläche. Dann gilt  $\text{lk}(\gamma) = \text{wind}(M)$ .*

*Beweis.* Sei  $F'$  die Fläche, die man erhält, wenn man  $F$  wie in Abbildung 3.1 leicht in den Körper entlang  $-N$  verschiebt. Sei  $\nu$  die äußere Flächennormale an  $\gamma$  in  $F$  und  $N_F$  die Normale von  $F$  in  $\Sigma$ . Da  $\gamma$  ein Reeb-Orbit ist, spannen diese Vektoren das Bündel  $\xi|_\gamma$  auf. Wir erinnern daran, dass die orthogonale Projektion von  $\xi_p$  auf die Kontaktstruktur in jedem  $p \in \Sigma$  ein orientierungserhaltender Isomorphismus ist. Die Selbstverlinkungszahl von  $\gamma$  ist daher die Windungszahl von  $M$  in  $\xi$  bezüglich  $\{\nu, N_F\}$ . Es existiert eine Funktion

$$\sigma : F' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\sigma\| \ll 1,$$

die auf  $\gamma$  positiv ist, sodass das Tangentialbündel von  $F'$  über  $\gamma$  von  $\dot{\gamma}$  und  $\nu + \sigma N$  aufgespannt wird. Das Normalenbündel  $NF'$  von  $F'$  in  $\mathbb{R}^4$  ist daher durch den Spann von  $N_F$  und  $\nu' = -\sigma\nu + N \neq 0$  approximiert. Diese Vektoren trivialisieren  $NF'$ . Da  $M \perp N$ , ist die Umlaufzahl der Projektion von  $M$  auf  $NF'$  bezüglich  $\{N_F, \sigma\nu + N\}$  gleich der Umlaufzahl von  $M$  in  $\xi$  bezüglich  $\{N_F, \nu\}$ . Wähle nun eine Homotopie von Immersionen, die  $F'$  so in  $f(D^2)$  überführt, dass die Normalenbündel definiert sind und dass die Projektion von  $\xi$  auf die Normalenbündel Isomorphismen bleiben. Da alles stetig ineinander übergeht, kann sich die Umlaufzahl der Projektion von  $M$  nicht ändern. Somit gilt  $\text{lk}(\gamma) = \text{wind}(M)$ .  $\square$

Wir benötigen noch folgendes Theorem aus der Theorie minimaler Flächen. Die *totale Krümmung* einer glatten Kurve ist dabei das Integral über den Betrag der zweiten Ableitung der Kurve, nachdem man diese nach Bogenlänge parametrisiert hat.

**Theorem 3.3.5 ([EWW02], Theorem 3.2).** *Sei  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine einfach geschlossene, glatte Kurve, deren totale Krümmung kleiner als  $4\pi$  ist. Sei  $f$  eine minimale Fläche in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  mit Rand  $\gamma$ . Dann ist  $f$  eine glatt eingebettete Mannigfaltigkeit mit Rand.*

Daraus folgt mit Korollar 2.2.2 sofort das folgende Korollar, da wir für Reeb-Orbiten  $\gamma$  mit Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  eine eingebettete, konforme Parametrisierung einer global minimalen Fläche erhalten.

**Korollar 3.3.6.** *Für die Hauptkrümmungen  $a \geq b \geq c$  von  $\partial C$  gelte  $b + c \geq a$ . Dann ist jede Minimalfläche in  $C$ , deren Rand ein Reeb Orbit vom Index  $\mu = 3$  ist, eine eingebettete Mannigfaltigkeit mit Rand.*

Sei nun  $C$  ein Körper, der die Voraussetzungen von Theorem 3.0.3 erfüllt und sei  $\gamma$  ein Reeb-Orbit mit  $\mu(\gamma) = 3$ . Nach Korollar 3.3.6 und Theorem 3.0.4 berandet  $\gamma$  eine eingebettete, global minimale Scheibe. Diese Scheibe ist nach den Sätzen 3.3.2, 3.3.3 und 3.3.4 genau dann symplektisch, wenn  $\text{lk}(\gamma) = -1$ . Somit ist Theorem 3.0.3 bewiesen, wenn wir  $\text{lk}(\gamma) = -1$  zeigen.

### 3.4 Die Selbstverlinkungszahl

Die Beugung  $m(\gamma)$  einer Kurve  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$  sei, wie in Abschnitt 2.2 definiert, das Minimum über alle  $m(\gamma, b)$ , wobei  $m(\gamma, b)$  die Anzahl der Maxima der Funktion  $t \mapsto \langle \gamma(t), b \rangle$ ,  $b \in S^3$  bezeichnet. In diesem Teil der Arbeit beweisen wir folgendes Resultat:

**Theorem 3.4.1.** *Sei  $C \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$  ein beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand  $\Sigma$ . Sei*

$$\gamma : S^1 \rightarrow \Sigma$$

*ein Reeb-Orbit auf  $(\Sigma, \lambda_0)$  mit Beugung  $m(\gamma) = 1$ . Dann hat  $\gamma$  die Selbstverlinkungszahl  $\text{lk}(\gamma) = -1$ .  $\lambda_0$  ist hier die kanonische Eins-Form.*

Als Korollar erhalten wir den zweiten Teil der Antwort auf die in [HWZ98] gestellte Frage, ob der Reeb-Orbit minimaler Wirkung auf dem Rand eines konvexen Körpers unverknotet ist und ob er Selbstverlinkungszahl  $lk = -1$  hat, für die hier betrachtete Klasse konvexer Körper.

**Korollar 3.4.2.** *Sei  $\gamma$  ein Orbit mit Maslov-Index  $\mu(\gamma) = 3$  auf  $\Sigma$ . Seien weiter  $a \geq b \geq c$  die Hauptkrümmungen von  $\Sigma$  entlang  $\gamma$ , sodass  $b + c \geq a$  gilt. Dann ist  $\text{lk}(\gamma) = -1$ .*

*Beweis.* Nach Korollar 2.2.2 wissen wir, dass  $m(\gamma) = 1$ . Mit Theorem 3.4.1 folgt sofort das Resultat.  $\square$

Wie Eliashberg in [Eli92] gezeigt hat, gilt für transversale Unknoten  $\gamma$  in straffen Kontaktstrukturen auf  $S^3$ , dass  $\text{lk}(\gamma) \leq -1$ . Da  $\lambda_0$  eine straffe Kontaktstruktur auf  $\Sigma \approx S^3$  induziert, genügt es zu zeigen, dass  $|\text{lk}(\gamma)| \leq 1$ . Nach der Definition der Beugung  $m$  existiert für  $\gamma$  mit  $m(\gamma) = 1$  ein Vektor  $N_0 \in \mathbb{R}^4$ , sodass die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle p, N_0 \rangle \end{aligned}$$

eingeschränkt auf  $\gamma$  genau ein Maximum und ein Minimum annimmt. Wir parametrisieren von nun an  $\gamma$  nach Bogenlänge. Sei  $T$  die Periode von  $\gamma$  und seien  $t_1$  bzw.  $t_2$  in  $\mathbb{R}/[0, T] = S^1$  Zeitpunkte, an denen  $f \circ \gamma$  maximal bzw. minimal ist. Dann folgt auf  $\dot{\gamma} = JN$  aber

$$\langle JN_{[t_1, t_2]}, N_0 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \langle JN_{[t_2, t_1]}, N_0 \rangle \geq 0. \quad (3.7)$$

$N(t) = N(\gamma(t))$  ist hier die äußere Flächennormale an  $\Sigma$  in  $\gamma(t)$  und  $J$  die komplexe Struktur in  $\mathbb{C}^2$ . Sei weiter  $M(t) := \hat{M}N(t)$ , wobei  $\hat{M} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  die, wie in Abschnitt 2.1 definierte  $\mathbb{R}$ -lineare, orthogonale Abbildung ist. Man beachte, dass dann für  $M_0 = \hat{M}N_0$  Folgendes gilt:

$$\langle JM|_{[t_1, t_2]}, M_0 \rangle = -\langle JN_{[t_1, t_2]}, N_0 \rangle \geq 0 \quad (3.8)$$

und analog

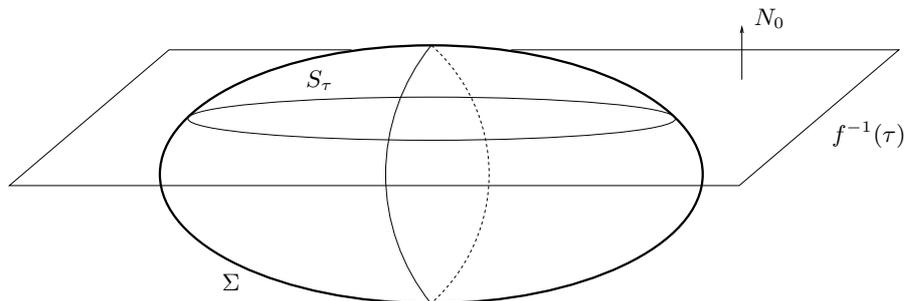
$$\langle JM|_{[t_2, t_1]}, M_0 \rangle \leq 0. \quad (3.9)$$

Wir bemerken, dass die Vektoren  $N_0, JN_0, M_0, JM_0$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^4$  bilden. Wenn wir Koordinaten von  $\mathbb{R}^4$  bezüglich dieser Basis angeben, so ist  $f$  einfach die  $N_0$ -Koordinatenfunktion. Wir wollen nun eine Seifert-Fläche

$$F : (D^2, S^1) \rightarrow (\Sigma, \gamma)$$

konstruieren, sodass für jeden Punkt  $\gamma(t)$  ein in die Fläche zeigender Tangentialvektor  $v \neq 0$  existiert, sodass  $\langle v, M_0 \rangle \geq 0$ . Sei  $\nu \in \Gamma(TF|_\gamma)$  die nach innen zeigende Normale an  $\gamma$ . Dann gilt, da  $\dot{\gamma} = JN$ , dass

$$\langle JM, \nu \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle JM, v \rangle \leq 0.$$

Abbildung 3.2: Die Sphären  $S_\tau$ 

Mit (3.8),(3.9) und  $\langle \nu, M_0 \rangle \geq 0$  folgt dann aber, dass  $JM$  in dem von  $\nu$  und der Flächennormalen  $N_F$  an  $F$  in  $\Sigma$  aufgespannten Bündel  $\text{span}(N_F, \nu)$  bezüglich  $\nu$  eine Umlaufzahl vom Betrag kleiner oder gleich eins hat. Damit gilt mit der Aussage oben aber  $\text{lk}(\gamma) = -1$ .

Nach Milnor können wir  $N_0$  aus einer offenen Menge wählen. Sei daher  $N_0$  so, dass für alle Punkt  $q \in \gamma(S^1)$  gilt:

$$N(q) \neq N_0, \quad N(q) \neq JM_0, \quad N(q) \neq M_0$$

Die erste Bedingung bewirkt, dass die Extrema von  $f|_\gamma$  disjunkt von den Extrema von  $f|_\Sigma$  liegen. Die Zweite sorgt dafür, dass  $\gamma$  nie tangential an  $M_0$  liegt und die Dritte dafür, dass die Projektion von  $M_0$  auf den Tangentialraum von  $\Sigma$  entlang  $\gamma$  nicht verschwindet. Sei weiter  $N_0$  so, dass  $f|_\gamma$  nur strikte Extrema annimmt. Diese Wahl ist möglich, da die gegebenen Bedingungen nur eine Nullmenge für  $N_0$  ausschließen.

Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned} g : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle N(p), JN_0 \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle p, M_0 \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist  $h$  die  $M_0$ -Koordinatenabbildung. Zur Konstruktion von  $F$  benötigen wir die folgenden Untermannigfaltigkeiten von  $\Sigma$ . Seien  $\tau_{max}, \tau_{min}$  maximaler und minimaler Punkt von  $f|_\gamma$  und

$$S_\tau := f^{-1}(\tau) \cap \Sigma, \quad \tau \in [\tau_{min}, \tau_{max}] \quad (3.10)$$

die Schnitte von  $\Sigma$  mit den Ebenen mit konstanter  $N_0$ -Koordinate. Sei weiter

$$S := g^{-1}(0). \quad (3.11)$$

Aufgrund der Wahlen von  $\tau$  sind die  $S_\tau$  diffeomorph zu  $S^2$ . Wenn wir  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  in Koordinaten  $\{N_0, JN_0, M_0, JM_0\}$  und die Gauss-Abbildung  $N : \Sigma \rightarrow S^3$  betrachten, so ist  $S$  das Urbild des Schnittes von  $S^3$  mit der Ebene, deren  $JN_0$ -Koordinate gleich null ist. Somit ist  $S$  ebenfalls diffeomorph zu  $S^2$ .

**Lemma 3.4.3.**  *$S$  schneidet  $S_\tau$  transversal für alle  $\tau \in [\tau_{max}, \tau_{min}]$ . Alle kritischen Punkte von  $h|_{S_\tau}$  liegen in  $S_\tau \cap S$ .*

*Beweis.* Sei  $p \in S_\tau$  ein kritischer Punkt der Funktion  $h|_{S_\tau}$ . Dann gilt nach der Regel der Lagrange-Multiplikatoren

$$\text{grad } h = l_1 N_0 + l_2 N, \quad l_1, l_2 \in \mathbb{R}.$$

Da  $\text{grad } h = M_0$  und  $N_0 \perp M_0$ , gilt  $l_2 \neq 0$ , also

$$N(p) = \frac{l_1}{l_2} N_0 + \frac{1}{l_2} M_0.$$

Daraus folgt aber

$$\langle N(p), JN_0 \rangle = 0.$$

Daher gilt  $g(p) = 0$  und  $p \in S$ .

Sei nun  $p \in S \cap S_\tau$ . Da  $p \in S$ , ist  $JN_0 \in T_p \Sigma$ . Es gilt

$$\langle \text{grad } f, JN_0 \rangle = \langle N_0, JN_0 \rangle = 0$$

und

$$\langle \text{grad } g, JN_0 \rangle = \langle dN_p(JN_0), JN_0 \rangle = \Pi_{JN_0, JN_0} > 0.$$

Somit ist der Schnitt transversal.  $\square$

**Lemma 3.4.4.**  *$h|_{S_\tau}$  hat nur zwei kritische Punkte.*

*Beweis.* Nach Konstruktion ist  $S_\tau = \partial C \cap f^{-1}(\tau) = \partial(C \cap f^{-1}(t))$  der Rand eines streng konvexen Körpers in  $\mathbb{R}^3$ .  $f^{-1}(\tau)$  ist ein affiner Raum mit Koordinatenrichtungen  $\{JN_0, M_0, JM_0\}$ . Die Funktion  $h$  ist auf diesem Raum erneut die  $M_0$ -Koordinatenabbildung. Da der Körper streng konvex ist, hat diese Funktion nur ein Maximum, ein Minimum und keine Sattelpunkte.  $\square$

Wir benötigen auch folgendes Lemma.

**Lemma 3.4.5.** *Kritische Punkte von  $h|_{S_\tau \cap S}$  sind kritische Punkte von  $h|_{S_\tau}$ .*

*Beweis.* Sei  $p$  ein kritischer Punkt von  $h|_{S_\tau \cap S}$ . Dann existieren  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\text{grad } h(p) = M_0 = l_1 N_0 + l_2 N(p) + l_3 \text{grad } g(p). \quad (3.12)$$

Nun gilt nach der Definition von  $S$ , dass

$$\langle N(p), JN_0 \rangle = 0.$$

Wie oben folgt wegen der strengen Konvexität von  $C$ , dass

$$\langle \text{grad } g, JN_0 \rangle = \Pi_{JN_0, JN_0} > 0.$$

Somit kann (3.12) nur gelten, wenn  $l_3 = 0$ , das heißt, wenn

$$\text{grad } h(p) = M_0 = l_1 N_0 + l_2 N(p).$$

Daher ist  $p$  ein kritischer Punkt von  $h|_{S_\tau}$ .  $\square$

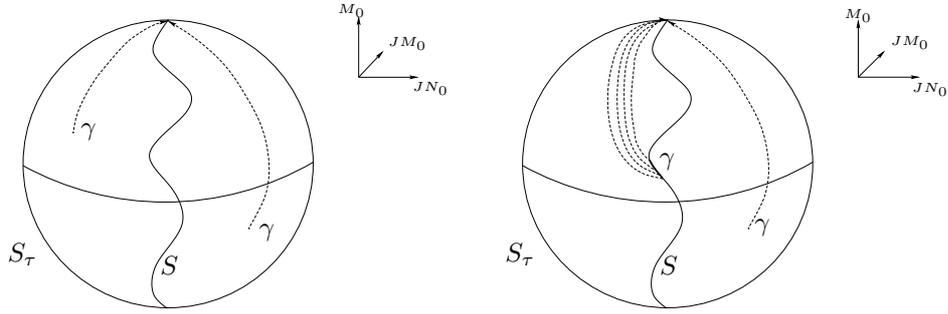


Abbildung 3.3: Konstruktion der Scheibe

Wir nutzen nun aus, dass  $S \cap S_\tau$  wegen der Lemmata 3.4.5 und 3.4.4 nur eine Zusammenhangskomponente hat. Somit teilt  $S$  die einzelnen Sphären  $S_\tau$  in zwei Hälften. Seien

$$S_\tau^1 := \{p | p \in S_\tau, g(p) \geq 0\}, \quad S_\tau^2 := \{p | p \in S_\tau, g(p) \leq 0\}.$$

Dann gilt aber wegen (3.7), dass

$$\gamma|_{(t_1, t_2)} \subset \bigcup_{\tau} S_\tau^1, \quad \gamma|_{(t_2, t_1)} \subset \bigcup_{\tau} S_\tau^2,$$

und  $\gamma(t_1) \in S_{\tau_{max}} \cap S, \gamma(t_2) \in S_{\tau_{min}} \cap S$ . Ansonsten schneidet  $\gamma$  jedes  $S_\tau$  in genau zwei Zusammenhangskomponenten  $\gamma_\tau^1$  und  $\gamma_\tau^2$  mit  $\gamma_\tau^i \subset S_\tau^i$ . Wir definieren nun eine Homotopie

$$H(t, s) : S^1 \times I \rightarrow \Sigma$$

mit  $H(t, 0) = \gamma(t)$ , sodass  $H(t, s)$  für festes  $t \in S^1 - \{t_1, t_2\}$  die jeweilige Halbsphäre  $S_\tau^i$  nicht verlässt.

Mit  $p(\tau) \in S$  bezeichnen wir den maximalen Punkt der Funktion  $h|_{S_\tau}$ . Sei dann  $H(t_1, s)$  eine eingebettete Kurve in  $S_{\tau_{max}} \cap S$ , die  $\gamma(t_1)$  so mit  $p(\tau_{max})$  verbindet, dass die  $M_0$ -Koordinate monoton wächst. Dies ist möglich, da  $h$  maximal zwei kritische Punkte in  $S_\tau$  hat. Man beachte, dass für den Fall  $\gamma(t) = p(\tau)$  die Kurve  $H(t, s)$  ein Punkt sein wird. Wir betrachten bei der weiteren Konstruktion von  $H$  zwei Fälle.

- Fall 1:  $\gamma$  schneidet  $S_\tau$  transversal. Dann gilt aber, dass  $\langle JN, N_0 \rangle \neq 0$  und somit  $\gamma(t) \notin S$ . In diesem Fall definieren wir  $H(t, s)$  als eine Kurve von  $\gamma(t)$  nach  $p(\tau)$ , die  $S$  nur in  $p(\tau)$  trifft und auf der  $h$  monoton wächst.
- Fall 2: Sollte  $\gamma$  die Sphäre  $S_\tau$  nicht transversal schneiden, so liegt  $\gamma|_{[t-\sigma, t+\sigma']}$ ,  $\sigma, \sigma' \geq 0$ , wegen  $\langle JN, N_0 \rangle = 0$  in  $S \cap S_\tau$ . Für  $t \in (t_1, t_2)$  definieren wir dann die Homotopie wie in Abbildung 3.3 als

$$H : [t - \sigma, t + \sigma'] \times I \rightarrow S_\tau^1$$

so, dass für festes  $t' \in [t - \sigma, t + \sigma']$  die Kurven  $s \mapsto H(t', s)$  bis auf den Endpunkt disjunkt sind. Seien die Kurven  $H(t', s)$  außerdem so gewählt, dass die Funktion  $h$  monoton in  $s$  wächst und dass sie  $S$  nur auf dem Rand ihres Definitionsintervalles schneiden. Für  $t \in (t_2, t_1)$  definieren wir analog

$$H : [t - \sigma, t + \sigma'] \times I \rightarrow S_\tau^2.$$

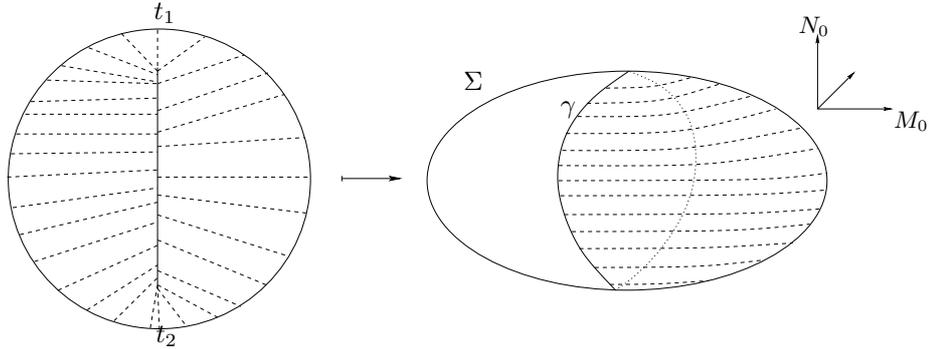


Abbildung 3.4: Die Parametrisierung der Scheibe

Zuletzt bleibt noch zu beachten, dass, wenn  $t$  von links und von rechts gegen  $t_2$  geht, die jeweiligen Kurvenscharen gegen die gleiche Kurve

$$H(t_2, s) : I \rightarrow S_{\tau_{min}} \cap S$$

konvergieren. Diese verbindet wieder  $\gamma(t_2)$  mit  $p(\tau_{min})$  und  $h$  wächst monoton.  $H$  lässt sich stetig konstruieren, weil

$$\{p \in S_\tau^i \mid h(p) \geq h(\gamma(t))\} \approx D^2.$$

Da

$$\begin{aligned} p : [\tau_{min}, \tau_{max}] &\rightarrow \Sigma \\ \tau &\mapsto p(\tau) \end{aligned}$$

eine eingebettete Kurve in  $\Sigma$  ist, haben wir eine stetige Kreisscheibe definiert, die auf  $D^2$  wie in Abbildung 3.4 parametrisiert ist. Diese Scheibe lässt sich mit der oben geforderten Monotonie von  $h$  so konstruieren und glatt parametrisieren, dass die dadurch entstehende, differenzierbar eingebettete Scheibe

$$F : (D^2, S^1) \rightarrow (\Sigma, \gamma)$$

in jedem Randpunkt  $\gamma(t)$  einen nach innen gerichteten Vektor  $v \in T_{\gamma(t)}F$  hat, sodass  $\langle M_0, v \rangle \geq 0$ . Damit haben wir Theorem 3.4.1 und auch Theorem 3.0.3 bewiesen.

# Kapitel 4

## Abschätzungen für den Reeb-Fluss

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Körper, auf deren Rändern die Reeb-Orbiten existieren, so zu modifizieren, dass sich neue Orbiten durch Verkleben der alten ergeben. Wir suchen Voraussetzungen, die nur von den Krümmungen des Randes abhängen, sodass diese Verklebung möglich ist. Am Ende des Kapitels werden durch diese Verklebung Obstruktionen an den minimalen Reeb-Orbit eines streng konvexen Körpers hergeleitet.

### 4.1 Eigenschaften konvexer Körper

Sei wieder  $C \subset \mathbb{R}^4$  ein beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand  $\Sigma$ , sodass der Nullpunkt im Inneren von  $C$  liegt. Wie in Kapitel 2 bezeichnen wir mit  $\Pi_{max}$  bzw.  $\Pi_{min}$  die maximale bzw. minimale Hauptkrümmung auf  $\Sigma$ . Mit  $N(p)$  bezeichnen wir die äußere Flächennormale an  $\Sigma$  in  $p$  und für eine Reeb-Kurve  $\gamma(t)$  sei  $N(t) := N(\gamma(t))$ .

Um die oben angesprochene Verklebung durchführen zu können, benötigen wir zuerst, dass die Lipschitz-Konstanten der Abbildungen  $N$ ,  $\gamma$  und des Reeb-Flusses  $\Psi_t$  bezüglich der euklidischen Metrik nur von  $\Pi_{max}$  und  $\Pi_{min}$  abhängen.

Aus Theorem 2.1 und Bemerkung 2.3 aus [GW93, Vol B, p.1055] entnehmen wir zunächst folgendes Lemma.

**Lemma 4.1.1.** *Sei  $C$  ein streng konvexer, abgeschlossener Körper mit glattem Rand  $\Sigma$ . Sei  $r_0 < \frac{1}{\Pi_{max}}$ . Dann gilt für alle Bälle*

$$B_{r_0}(p) = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid |q - p| \leq r_0\}$$

die  $\Sigma$  von innen in einem Punkt  $q$  berühren, dass  $B_{r_0}(p) \subset C$  und  $B_{r_0}(p) \cap \Sigma = q$ .

**Bemerkung.** Sei  $r_0 > \frac{1}{\Pi_{min}}$  und  $B_{r_0}(p)$  berühre  $C$  in einem Punkt  $q$ , sodass die inneren Normalen übereinstimmen. Dann folgt aus Bemerkung 2.3 in [GW93], dass  $C \subset B_{r_0}(p)$  und  $B_{r_0}(p) \cap \Sigma = q$ .

Wir benötigen weiter die Äquivalenz zwischen der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^4$  und der induzierten geodätischen Metrik  $d$  auf  $\Sigma$ .

**Lemma 4.1.2.** Sei  $U \subset \Sigma$  ein Gebiet, in dem  $\langle N(a), N(b) \rangle > 0$  für alle  $a, b \in U$  ist. Dann gilt für  $p, q \in U$

$$|p - q| < d(p, q) < 2|p - q|,$$

wobei  $d(\cdot, \cdot)$  die geodätische Metrik auf  $\Sigma$  und  $|\cdot|$  die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^4$  bezeichnet.

*Beweis.* Die erste Ungleichung ist klar. Sei nun  $c$  Kürzeste von  $p$  nach  $q$  in  $\Sigma$ . Sei weiter  $\bar{c} := \Sigma \cap E$ , wobei  $E$  die affine Ebene mit Fußpunkt  $p$  ist, die von  $N(p)$  und  $p - q$  aufgespannt wird.  $\bar{c}$  ist eine differenzierbare Kurve, da der Schnitt von  $\Sigma$  mit  $E$  nach Voraussetzung transversal ist. Parametrisieren wir  $\bar{c}$ , dann gilt

$$d(p, q) = l(c) \leq l(\bar{c}) = \int |\dot{\bar{c}}|,$$

wobei  $\dot{\bar{c}} := \frac{\partial}{\partial t} \bar{c}$ . Wir bezeichnen mit  $x^N$  den  $N(p)$ -Anteil eines Vektors  $x$  und mit  $x^T$  den tangentialen Rest. Dann gilt

$$\int |\dot{\bar{c}}| \leq \int |(\dot{\bar{c}})^N| + |(\dot{\bar{c}})^T| < 2|p - q|.$$

Das zweite Ungleichheitszeichen folgt aus der Konvexität des Körpers, da

$$\langle \dot{\bar{c}}, N(p) \rangle \leq 0 \text{ und } (\dot{\bar{c}})^T \neq 0,$$

und weil die Integralkurven zu  $(\dot{\bar{c}})^N$  bzw.  $(\dot{\bar{c}})^T$  Geradestücke parallel bzw. senkrecht zu  $N(p)$  sind.  $\square$

Die Gauss-Abbildung  $N : \Sigma \rightarrow S^3$  ist eine stetig differenzierbare Abbildung von einer kompakten Mannigfaltigkeit nach  $S^3$  und somit Lipschitz-stetig, wobei die Lipschitz-Konstante bezüglich der geodätischen Metrik nur von  $\Pi_{max}$  abhängt. Da die euklidische Metrik und die geodätische Metrik äquivalent sind, können wir ein  $\delta' > 0$  finden, sodass

$$\langle N(p), N(q) \rangle > \frac{1}{2}$$

für alle  $2\delta'$ -Bälle  $B$  mit Mittelpunkt auf  $\Sigma$  und  $p, q \in B \cap \Sigma$  gilt. Sei

$$\delta := \min \left( \delta', \frac{1}{2\Pi_{max}} \right). \quad (4.1)$$

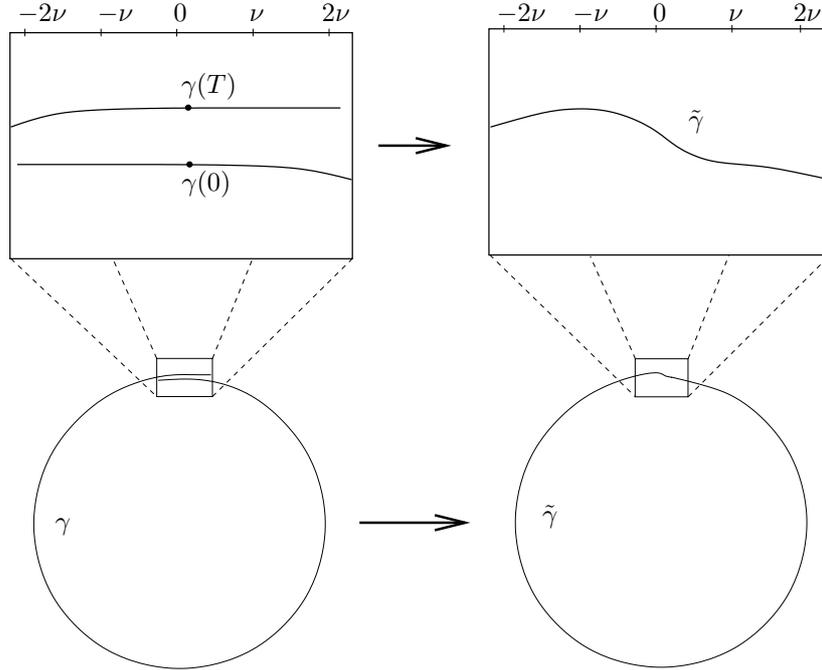
Damit finden wir auch eine Lipschitz-Konstante  $L_N$ , die nur von der Krümmung von  $\Sigma$  abhängt, sodass gilt:

$$|N(p) - N(q)| < L_N |p - q| \quad \text{für } p, q \in B_\delta(x) \cap \Sigma, x \in \Sigma. \quad (4.2)$$

Desweiteren existiert für festes, kleines  $\nu > 0$  eine Lipschitz-Konstante  $L$  für den Reeb-Fluss  $\Psi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , die nur von der Krümmung abhängt, sodass gilt:

$$|\Psi_t(p) - \Psi_t(q)| < L |p - q| \quad \text{für } t \in [-2\nu, 2\nu] \quad (4.3)$$

Wir parametrisieren später die Orbits von  $\Psi_t$  nach Bogenlänge.  $L$  ist in diesem Fall gegeben durch  $e^{L_N \nu}$ , wenn  $\Psi_t(p), \Psi_t(q)$  für die gegebenen  $t$  einen  $\delta$ -Ball nicht verlassen. Außerdem gilt für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven  $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ , dass  $|\gamma(t) - \gamma(\tau)| < |t - \tau|$ .

Abbildung 4.1: Verkleben eines Orbits  $\gamma$ 

## 4.2 Verkleben von Reeb-Orbiten

In diesem Abschnitt definieren wir die Verklebeoperation für Reeb-Orbiten und geben Bedingungen an die Krümmung von  $\Sigma$  dafür an, dass die entstehende Kurve ein Reeb-Orbit auf dem Rand eines konvexen Körpers sein kann.

Von nun an betrachten wir nicht mehr den Reeb-Fluss selbst, sondern parametrisieren die Orbits nach Bogenlänge, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(p)|_{t=t_0} = JN(\Psi_{t_0}(p)).$$

Die Resultate, die wir dadurch erhalten, gelten auch für den Reeb-Fluss, da die Wirkung eines Orbits unabhängig von dessen Parametrisierung sind.

**Satz 4.2.1.** *Sei  $C$  ein beschränkter, streng konvexer Körper mit glattem Rand  $\partial C = \Sigma$  und sei  $\Psi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$  der oben definierte Fluss. Dann existieren Konstanten  $K \in \mathbb{N}$ ,  $\nu, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ , die nur von  $\Pi_{\min}$  und  $\Pi_{\max}$  abhängen, sodass die folgende Aussage gilt:*

*Angenommen es existiert ein Punkt  $p \in \Sigma$  und eine Zeit  $T$ , sodass für  $\gamma(t) := \Psi_t(p)$  gilt*

$$\sup_t |\gamma(t) - \gamma(T+t)| < \epsilon \quad \text{für } t \in [-2\nu, 2\nu] \quad (4.4)$$

*sowie*

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| > K\epsilon \quad \text{und} \quad |\gamma(T+t_0) - \gamma(t_1)| > K\epsilon \quad (4.5)$$

*für  $t_0 \in [-\nu, \nu]$  und  $t_1 \in [2\nu, T-2\nu]$ . Definiere die geschlossene Kurve*

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R}/[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$$

wie in Abbildung 4.1 als

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [\nu, T - \nu] \\ \eta\left(\frac{t+\nu}{2\nu}\right)\gamma(t) + \left(1 - \eta\left(\frac{t+\nu}{2\nu}\right)\right)\gamma(T + t) & \text{für } t \in [-\nu, +\nu] \end{cases},$$

wobei  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine glatte Funktion ist mit

$$\eta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 1. \end{cases}$$

Die Normale  $\tilde{N}$  sei

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t) : \mathbb{R}/[0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto -J \frac{\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\gamma}(t)}{\left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\gamma}(t) \right|}. \end{aligned}$$

Wir definieren damit den konvexen Körper  $\tilde{C} := \bigcap_{t \in [0, T]} C_t$  als den Schnitt aller Halbräume

$$C_t := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x - \tilde{\gamma}(t), \tilde{N}(t) \rangle \leq 0\}.$$

Dann ist  $\tilde{N}$  äußere Einheitsflächennormale auf  $\tilde{C}$  und  $\tilde{\gamma}$  bis auf Parametrisierung ein geschlossener Reeb-Orbit auf  $\tilde{C}$ .

**Bemerkung.** Der hier definierte Körper  $\tilde{C}$  hat nur in einer Umgebung des Orbits  $\tilde{\gamma}$  einen glatten Rand und ist nicht beschränkt. Wir können ihn aber mit einem großen 4-Ball schneiden und so von innen durch einen Körper mit glattem Rand approximieren, dass die beiden Körper in der Nähe von  $\tilde{\gamma}$  übereinstimmen. Für den neuen Körper haben die in diesem Kapitel bewiesenen Aussagen weiter Bestand.

*Beweis.* Nach der Definition von  $\tilde{N}$  und  $\tilde{C}$  genügt es zu zeigen, dass  $\tilde{\gamma} \subset \tilde{C}$ , d.h.

$$\langle \tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{N}(\tau) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } t, \tau \in \mathbb{R}/[0, T]. \quad (4.6)$$

Für  $\tau \notin [-\nu, \nu]$  ist das klar. In diesem Fall ist  $\tilde{N}(\tau) = N(\tau)$ . Da  $C$  ein konvexer Körper ist und  $\tilde{\gamma}(t)$  entweder auf  $\gamma$  oder auf einer Geraden zwischen zwei Punkten von  $\gamma$  liegt, folgt das Resultat. Sei von nun an  $\tau \in [-\nu, \nu]$ . Der Einfachheit wegen rechnen wir mit

$$\tilde{N}(t) := -J \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\gamma}(t).$$

Dies ist erlaubt, da sich die Konvexitätsfunktion (4.6) nur um einen positiven Faktor ändert.

Fall 1: Sei  $t \in [-2\nu, 2\nu]$ . Wir betrachten die Taylorentwicklung von

$$f(t) := \langle \tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{N}(\tau) \rangle$$

in  $t = \tau$ . Da  $f(\tau) = 0$  und  $f'(\tau) = \langle \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\gamma}(\tau), -J \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\gamma}(\tau) \rangle = 0$  folgt:

$$f(t) = \frac{(t - \tau)^2}{2} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\gamma}(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle, \quad \text{für } \rho \in [\tau, t] \text{ oder } \rho \in (t, \tau)$$

Es genügt demnach zu zeigen, dass

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\gamma}(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle < 0 \quad \text{für alle } \rho \in [-2\nu, 2\nu].$$

Wir definieren hierfür die Teilkurven  $\gamma_1, \gamma_2, N_1, N_2 : [-2\nu, 2\nu] \rightarrow \Sigma$  als

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \gamma(t), & N_1(t) &= N(t) \\ \gamma_2(t) &= \gamma(T+t), & N_2(t) &= N(T+t). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t) &= -J \frac{1}{2\nu} \frac{\partial \eta}{\partial t} \left( \frac{t+\nu}{2\nu} \right) (\gamma_1(t) - \gamma_2(t)) \\ &\quad + \eta \left( \frac{t+\nu}{2\nu} \right) N_1(t) + \left( 1 - \eta \left( \frac{t+\nu}{2\nu} \right) \right) N_2(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{N}(t) &= -J \frac{1}{4\nu^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \left( \frac{t+\nu}{2\nu} \right) (\gamma_1(t) - \gamma_2(t)) \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \frac{\partial \eta}{\partial t} \left( \frac{t+\nu}{2\nu} \right) (N_1(t) - N_2(t)) \\ &\quad + \eta \left( \frac{t+\nu}{2\nu} \right) \frac{\partial}{\partial t} N_1(t) + \left( 1 - \eta \left( \frac{t+\nu}{2\nu} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t} N_2(t) \end{aligned}$$

Wir definieren  $V(t) := \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$  und  $W(t) := N_1(t) - N_2(t)$ . Dann gilt nach Voraussetzung und (4.2), dass  $|V| < \epsilon$  und  $|W| < L_N \epsilon$ . Außerdem benötigen wir, dass

$$|\tilde{N}(t) - N_i(t)| < \left( L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu} \right) \epsilon.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\gamma}(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle &= \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} \tilde{N}(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle \\ &= \frac{\dot{\eta}}{4\nu^2} \left\langle V(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle + \frac{\dot{\eta}}{\nu} \left\langle JW(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle \\ &\quad + \eta \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_1(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle \\ &\quad + (1 - \eta) \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_2(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle \\ &= \frac{\dot{\eta}}{4\nu^2} \left\langle V(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle + \frac{\dot{\eta}}{\nu} \left\langle JW(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle \\ &\quad + \eta \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_1(\rho), N_1(\tau) \right\rangle \\ &\quad + (1 - \eta) \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_2(\rho), N_2(\tau) \right\rangle \\ &\quad + \eta \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_1(\rho), \tilde{N}(\tau) - N_1(\tau) \right\rangle \\ &\quad + (1 - \eta) \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_2(\rho), \tilde{N}(\tau) - N_2(\tau) \right\rangle \end{aligned}$$

Durch Abschätzen der rechten Seite erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\gamma}(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle &\leq \frac{|\ddot{\eta}| \epsilon}{4\nu^2} + \frac{|\dot{\eta}| L_N \epsilon}{\nu} + \Pi_{max} \left( L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu} \right) \epsilon \\
&\quad + \eta \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_1(\rho), N_1(\tau) \right\rangle \\
&\quad + (1 - \eta) \left\langle J \frac{\partial}{\partial t} N_2(\rho), N_2(\tau) \right\rangle \\
&\leq \frac{|\ddot{\eta}| \epsilon}{4\nu^2} + \frac{|\dot{\eta}| L_N \epsilon}{\nu} + \Pi_{max} \left( L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu} \right) \epsilon \\
&\quad + 3L_N \Pi_{max} \nu - \Pi_{min}.
\end{aligned}$$

Wir haben im letzten Schritt verwendet, dass  $|\tau - \rho| \leq 3\nu$ . Sei nun  $\epsilon \leq \nu^3$  und  $\nu < 1$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{|\ddot{\eta}| \epsilon}{4\nu^2} + \frac{|\dot{\eta}| L_N \epsilon}{\nu} + \Pi_{max} \left( L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu} \right) \epsilon + 3L_N \Pi_{max} \nu - \Pi_{min} \\
&< \nu (|\ddot{\eta}| + |\dot{\eta}| L_N + (L_N + |\dot{\eta}|) \Pi_{max} + 3L_N \Pi_{max}) - \Pi_{min}
\end{aligned}$$

Wenn wir  $\nu$  in Abhängigkeit der Krümmung klein genug wählen gilt

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\gamma}(\rho), \tilde{N}(\tau) \right\rangle < 0$$

für alle  $\rho \in [-2\nu, 2\nu]$ .

Fall 2: Sei nun  $t \notin [-2\nu, 2\nu]$ , dass heißt  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ .

Dann gilt nach Voraussetzung, dass  $|\gamma(t) - \gamma(\tau)| > K\epsilon$ . Wir wollen nun  $\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), N(\tau) \rangle$  nach oben abschätzen. Sei  $B_{min}$  der Ball vom Radius  $\frac{1}{\Pi_{min}}$ , der  $\Sigma$  so in  $\gamma(\tau)$  berührt, dass  $C \subset B_{min}$ . Wir definieren weiter einen Kreis in der Ebene mit dem Fußpunkt  $\gamma(\tau)$ , die von  $N(\tau)$  und  $\gamma(\tau) - \gamma(t)$  aufgespannt wird. Dieser Kreis habe den Radius  $|\gamma(\tau) - \gamma(t)|$  und den Mittelpunkt  $\gamma(\tau)$ . Sei  $p$  der Schnittpunkt des Kreises mit  $B_{min}$ . Da  $C \subset B_{min}$  ist, gilt

$$\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), N(\tau) \rangle < \langle p - \gamma(\tau), N(\tau) \rangle.$$

Seien in Zeichnung 4.2 die Längen der Strecken  $x, y, z$  gegeben durch:

$$\begin{aligned}
|x| &= |\langle p - \gamma(\tau), N(\tau) \rangle| \\
|y| &= |p - \gamma(\tau)| = |\gamma(t) - \gamma(\tau)| \\
|z| &= \frac{2}{\Pi_{min}}
\end{aligned}$$

Mit dem Kathetensatz ergibt sich

$$|x| = \frac{|y|^2}{|z|}.$$

Aus der Definition von  $x, y$  und  $z$  folgt

$$\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), N(\tau) \rangle < -\frac{1}{2} K \epsilon \Pi_{min} |\gamma(t) - \gamma(\tau)|.$$

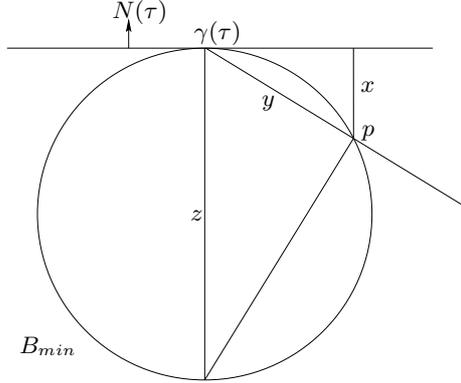


Abbildung 4.2: Abschätzungen zur Konvexität

Sei  $\tilde{N}(\tau) := N(T + \tau)$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{N}(\tau) \rangle &= \langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \tilde{N}(\tau) \rangle + \langle \gamma(\tau) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{N}(\tau) \rangle \\
&= \langle \gamma(t) - \gamma(\tau), N(\tau) \rangle + \underbrace{\langle \gamma(\tau) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{N}(\tau) \rangle}_{<0} \\
&\quad + \langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \tilde{N}(\tau) - N(\tau) \rangle \\
&\quad + \langle \gamma(\tau) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{N}(\tau) - \tilde{N}(\tau) \rangle \\
&< -\frac{1}{2}K\epsilon\Pi_{min}|\gamma(t) - \gamma(\tau)| \\
&\quad + (L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu})\epsilon|\gamma(t) - \gamma(\tau)| + (L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu})\epsilon^2 \\
&= ((L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu})\epsilon - \frac{1}{2}K\epsilon\Pi_{min})|\gamma(t) - \gamma(\tau)| \\
&\quad + (L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu})\epsilon^2.
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$((L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu})\epsilon - \frac{1}{2}K\epsilon\Pi_{min}) < 0 \quad \text{für } K > \frac{2(L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu})}{\Pi_{min}}$$

Das heißt für hinreichend großes  $K$  gilt:

$$\begin{aligned}
(L_n\epsilon - \frac{1}{2}K\epsilon\Pi_{min})|\gamma(t) - \gamma(\tau)| + L_n\epsilon^2 &< (L_n\epsilon - \frac{1}{2}K\epsilon\Pi_{min})K\epsilon + L_n\epsilon^2 \\
&= \epsilon^2(-\frac{\Pi_{min}}{2}K^2 + KL_n + L_n),
\end{aligned}$$

wobei  $L_n := L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{2\nu}$ .

Der rechte Teil der Gleichung wird negativ, wenn wir  $K$  in Abhängigkeit der Krümmung groß genug wählen.

Zusammenfassend bedeutet dies also, dass für  $\nu$  wie oben,  $\epsilon \leq \nu^3$  und entsprechendes  $K$  der Satz erfüllt ist.  $\square$

Es ist uns nun möglich unter den gegebenen Voraussetzungen einen konvexen Körper mit einem uns bekannten, geschlossenen Reeb-Orbit zu konstruieren. Über die Wirkung des neuen Orbits lässt sich Folgendes sagen.

**Satz 4.2.2.** *Sei  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}/[0, T] \rightarrow \partial\tilde{C}$  wie oben definiert. Dann gilt*

$$A(\tilde{\gamma}) < A(\gamma) + c_a \epsilon.$$

Die Konstante  $c_a$  hängt nur von der Krümmung von  $\Sigma$  ab.

*Beweis.* Da die Wirkung parametrisierungsunabhängig ist, gilt für den Reeb-Orbit  $\gamma$

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda = -\frac{1}{2} \int_0^T \langle J\dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle dt.$$

Wegen  $\dot{\gamma} = JN$  gilt

$$\begin{aligned} A(\tilde{\gamma}) &= \int_0^T \langle \tilde{N}(t), \tilde{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{\nu}^{T-\nu} \langle N(t), \gamma(t) \rangle dt + \int_{-\nu}^{\nu} \langle N(t), \gamma(t) \rangle dt \\ &\quad + \int_{-\nu}^{\nu} \langle \tilde{N}(t) - N(t), \tilde{\gamma}(t) \rangle dt \\ &\quad + \int_{-\nu}^{\nu} \langle N(t), \tilde{\gamma}(t) - \gamma(t) \rangle dt \\ &< A(\gamma) + 2\nu \left( L_N + \frac{|\dot{\eta}|}{\nu} \right) \frac{2\epsilon}{\Pi_{min}} + 2\nu\epsilon. \end{aligned}$$

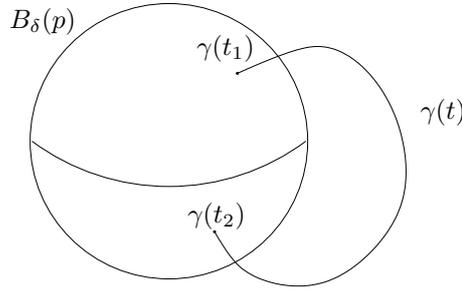
Der zweite Term ergibt sich, da  $C$  in einem Ball mit Radius  $\frac{1}{\Pi_{min}}$  enthalten ist und somit  $|\tilde{\gamma}(t)| < \frac{2}{\Pi_{min}}$  gilt.  $\square$

**Bemerkung.** Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden  $\epsilon, \nu$  und  $\delta$  noch weiter modifiziert. Die Konstante  $c_a$  hingegen bleibt fest.

### 4.3 Obstruktionen an den Reeb-Fluss

In diesem Abschnitt werden wir in Abhängigkeit von  $\Pi_{min}$  und  $\Pi_{max}$  Obstruktionen angeben, wie nahe der Reeb-Fluss sich selber kommen darf. Zunächst schwächen wir die Voraussetzungen zum Verkleben von Orbits ab. Dazu brauchen wir die folgenden Lemmata. Sei  $\delta$  weiter wie in (4.1) definiert.

**Lemma 4.3.1.** *Sei  $\Sigma$  wieder der glatte Rand eines beschränkten streng konvexen Körpers und  $\gamma(t)$  eine Flusslinie von  $\Psi$ , d.h.  $\dot{\gamma}(t) = JN(t)$ . Sei weiter  $B_{\delta}(p)$  ein 4-Ball mit Radius  $\delta$  und Mittelpunkt  $p \in \Sigma$ . Dann existiert ein  $d > 0$  in Abhängigkeit von der Krümmung von  $\Sigma$ , sodass gilt: Wenn  $t_2 > t_1, \gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial B_{\delta}(p)$  und  $\gamma((t_1, t_2)) \cap B_{\delta}(p) = \emptyset$ , wie in Abbildung 4.3, dann ist  $t_2 - t_1 > d$ .*

Abbildung 4.3:  $\gamma$  verlässt  $B_\delta$ 

*Beweis.* Sei  $t_0 \in [t_1, t_2]$  der Zeitpunkt, für den  $\text{dist}(B_\delta(p), \gamma(t))$  maximal ist. Mit  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  bezeichnen wir den euklidischen Abstand. Da die Krümmung von  $\gamma$  durch  $\Pi_{\max}$  beschränkt ist, berührt  $\gamma$  an dieser Stelle einen Ball mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $r > \frac{1}{\Pi_{\max}}$  von innen. Dann gilt aber  $l(\gamma) > 2(r - \delta)$ . Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt

$$t_1 - t_2 > 2 \left( \frac{1}{\Pi_{\max}} - \delta \right) =: d.$$

□

Wir schwächen nun die Voraussetzung (4.5) aus Satz 4.2.1 ab. Sei  $\gamma : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \Sigma$  eine Flusslinie des Flusses  $\Psi$  und sei  $B_\delta(\gamma(t_0))$  ein abgeschlossener  $\delta$ -Ball um  $\gamma(t_0)$ . Dann hat  $\gamma|_{[t_0, t_0+T]} \cap B_\delta(\gamma(t_0))$  möglicherweise unterschiedliche Zusammenhangskomponenten. Sei  $\gamma_0$  die Zusammenhangskomponente von  $\gamma(t_0)$ . Bezeichne mit  $\gamma_i, i > 0$  die Zusammenhangskomponenten von  $\gamma \cap B_\delta(\gamma(t_0))$  so, dass

$$\text{dist}(\gamma_i, \gamma(t_0)) \leq \text{dist}(\gamma_j, \gamma(t_0)) \text{ für } i < j.$$

Seien  $t_i \in [t_0, t_0 + T], i > 0$  so gewählt, dass  $\gamma(t_i) \in \gamma_i$  und  $|\gamma(t_i) - \gamma(t_0)| = \text{dist}(\gamma_i, \gamma(t_0))$ . Wir reparametrisieren die Kurven auf Intervalle  $I_i$

$$\gamma_i : I_i \rightarrow B_\delta(\gamma(t_0)),$$

sodass  $\gamma_i(0) = \gamma(t_i)$ .

**Bemerkung.** Wir möchten die Verklebenkonstruktion durchführen können, sobald sich zwei Punkte der Flusslinie nahe genug kommen. Um die Voraussetzung (4.5) aus Satz 4.2.1 zu gewährleisten, genügt es nach dem folgenden Lemma die Kurve auf ein Intervall  $[t_i, t_j]$  einzuschränken, sodass  $t_l \notin [t_i, t_j]$  für  $l \neq i, j$ . Während der Konstruktion dürfen wir einen  $\delta$ -Ball um  $\gamma(t_0)$  nicht verlassen. Daher müssen wir fordern, dass  $K\epsilon < \frac{1}{2}\nu - \epsilon$  und  $(K+1)\epsilon + 2\nu < 5\nu < \delta$ . Dies ist möglich, indem man in Satz 4.2.1 zuerst  $\nu$  verkleinert. Dadurch wächst  $K$  linear, aber da  $\epsilon \leq \nu^3$  die einzige Bedingung war, lässt sich  $\epsilon$  wieder passend verkleinern.

**Lemma 4.3.2 (Abstandslemma).** Sei  $\gamma : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \Sigma$  ein Flusslinie. Sei  $\delta$  wie in (4.1) gegeben und es existiere ein  $k$ , sodass  $B_\delta(\gamma(t_0)) \cap \gamma$  nur  $k$  Zusammenhangskomponenten hat. Seien  $\gamma_i$  und  $t_i$  wie oben definiert. Zu  $\nu, \epsilon > 0$  und  $K > 0$  wie oben gegeben, existiert dann ein  $\epsilon_0 > 0$ , das nur von der

Krümmung und  $k$  abhängt, sodass die folgende Aussage gilt:

Falls

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t_0 + T)| < \epsilon_0$$

existieren  $0 < \epsilon' < \epsilon$  und  $i_0 > 1$  mit den Eigenschaften:

1. Für  $i, j \leq i_0$  gilt

$$\sup_{\tau \in [-2\nu, 2\nu]} |\gamma_i(\tau) - \gamma_j(\tau)| < \epsilon'$$

und

$$|\gamma_i(t) - \gamma_j(t')| > K\epsilon'$$

für alle

$$t \in [-\nu, \nu] \text{ und } t' \in I_j - [-2\nu, 2\nu]$$

2. Für  $i > i_0, j \leq i_0$  gilt

$$|\gamma_j(\tau) - \gamma_i(t)| > K\epsilon' \quad \text{für alle } \tau \in [-\nu, \nu], t \in I_i$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon_0 \ll \delta$ .

Die Ungleichung  $|\gamma_i(t) - \gamma_j(t')| > K\epsilon'$  für alle  $t \in [-\nu, \nu]$  und  $t' \in I_j - [-2\nu, 2\nu]$ ,  $i, j < i_0$  folgt aus

1.  $K\epsilon' < K\epsilon < \frac{1}{2}\nu - \epsilon$
2.  $|\gamma_i(t) - \gamma_i(t')| > \frac{1}{2}\nu$  nach der Wahl von  $\delta$
3.  $\gamma_i(t) - \gamma_j(t) < \epsilon$ ,

da

$$|\gamma_i(t) - \gamma_j(t')| > \left| |\gamma_i(t) - \gamma_j(t)| - |\gamma_j(t) - \gamma_j(t')| \right| > \frac{1}{2}\nu - \epsilon > K\epsilon'.$$

Sei nun  $|\gamma(t_0) - \gamma(t_0 + T)|$  kleiner als  $\epsilon_0$ . Nach der Definition von  $t_1$  folgt

$$|\gamma_0(0) - \gamma_1(0)| < \epsilon_0.$$

Dann gilt

$$|\gamma_0(\tau) - \gamma_1(\tau)| < L\epsilon_0 =: \epsilon_1 \quad \text{für alle } \tau \in [-2\nu, 2\nu],$$

wobei  $L$  die Lipschitz-Konstante aus (4.3) ist. Wende nun folgendes Verfahren für aufsteigendes  $i \geq 2$  an:

1. Angenommen es gilt  $i \leq k$  und

$$\gamma_i(0) \in B_{(K+1)L\epsilon_{i-1}}(\gamma_0(0)).$$

Dann gilt

$$|\gamma_i(\tau) - \gamma_0(\tau)| < L^2(K+1)\epsilon_{i-1} \quad \text{für alle } \tau \in [-2\nu, 2\nu].$$

Sei o.B.d.A.  $L \geq 1$ , dann folgt

$$|\gamma_i(\tau) - \gamma_j(\tau)| < (K+2)L^2\epsilon_{i-1} \quad \text{für alle } \tau \in [-2\nu, 2\nu], j \leq i,$$

da

$$\begin{aligned} |\gamma_i(\tau) - \gamma_j(\tau)| &= |\gamma_i(\tau) - \gamma_0(\tau) + \gamma_0(\tau) - \gamma_j(\tau)| \\ &< |\gamma_i(\tau) - \gamma_0(\tau)| + |\gamma_0(\tau) - \gamma_j(\tau)| \\ &< (K+1)L^2\epsilon_{i-1} + \epsilon_{i-1} \\ &< (K+2)L^2\epsilon_{i-1}. \end{aligned}$$

Wir definieren  $\epsilon_i := (K+2)L^2\epsilon_{i-1}$ .

2. Wenn  $i > k$  oder  $\gamma_i \cap B_{(K+1)L\epsilon_{i-1}}(\gamma_0(0)) = \emptyset$  sei  $i_0 = i - 1$ . Damit gilt

$$\text{dist}(\gamma_i, \gamma_0|_{[-2\nu, 2\nu]}) > (K+1)\epsilon_{i-1}.$$

Angenommen es existieren  $\tau, \tau'$  in  $[-2\nu, 2\nu]$  mit

$$|\gamma_i(\tau) - \gamma_0(\tau')| < (K+1)\epsilon_{i-1}.$$

Dann ist

$$|\gamma_i(\tau - \tau') - \gamma_0(0)| < (K+1)L\epsilon_{i-1}.$$

Dies ist ein Widerspruch. Außerdem gilt

$$\text{dist}(\gamma_i, \gamma_j|_{[-2\nu, 2\nu]}) > K\epsilon_{i-1}, \quad \text{für } j \leq i_0, i > i_0,$$

da

$$\begin{aligned} \text{dist}(\gamma_i, \gamma_j|_{[-2\nu, 2\nu]}) &> |\text{dist}(\gamma_i, \gamma_0(t_0)) - \text{dist}(\gamma_j, \gamma_0(t_0))| \\ &> (K+1)\epsilon_{i-1} - \epsilon_{i-1} \\ &= K\epsilon_{i-1}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun  $\epsilon' := \epsilon_{i-1}$ . Da Schritt 1 maximal  $k$ -mal ausgeführt wird, können wir  $\epsilon_0$  unabhängig von  $i_0$  so klein wählen, dass  $\epsilon' < \epsilon$  und das Gewünschte erfüllt ist.

□

Es genügt nun, die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $\gamma \cap B_\delta$  zu beschränken, um von zwei Punkten des Orbits, die nahe beieinander liegen, auf die Voraussetzungen von Satz 4.2.1 zu schließen.

**Lemma 4.3.3.** *Sei  $\gamma : [0, T] \rightarrow \Sigma$  eine Flusslinie des Reeb-Flusses. Sei  $p \in \Sigma$ . Nach Lemma 4.1.1 können wir annehmen, dass  $p = \frac{1}{\Pi_{\max}}N(p)$ . Angenommen, es existiert dann eine Konstante  $c$ , sodass  $A(\gamma) < c$ . Dann existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , das nur von der Krümmung von  $\Sigma$  und von  $c$  abhängt, sodass  $\gamma \cap B_\delta(p)$  maximal  $k$  Zusammenhangskomponenten hat.*

*Beweis.* Sei  $A(\gamma) < c$ . Wir betrachten die Wirkung der Zusammenhangskomponenten  $\gamma_i$  von  $\gamma \cap B_\delta(p)$ . Angenommen  $\gamma(t_i) \in B_\delta(p)$ , dann gilt, da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, dass  $\gamma([t_i - \delta, t_i + \delta]) \subset B_{2\delta}(p)$ . Nun gilt aber

$$A(\gamma|_{[t_i - \delta, t_i + \delta]}) = \frac{1}{2} \int_{t_i - \delta}^{t_i + \delta} \langle N(\tau), \gamma(\tau) \rangle d\tau.$$

Daher gilt

$$A(\gamma|_{[t_i - \delta, t_i + \delta]}) = \frac{1}{2\Pi_{max}} \int_{t_i - \delta}^{t_i + \delta} \langle N(\tau), N(p) \rangle d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_i - \delta}^{t_i + \delta} \langle N(\tau), \gamma(\tau) - p \rangle d\tau.$$

Nach der Definition von  $\delta$  gilt

$$\langle N(\tau), N(p) \rangle > \frac{1}{2}.$$

Da nun aber  $A(\gamma) < c$  und  $\langle N(\tau), \gamma(\tau) - p \rangle > 0$  für alle  $\tau$  ist, kann  $\gamma \cap B_\delta(p)$  nur durch die Krümmung und die Wirkung beschränkt viele Zusammenhangskomponenten haben.  $\square$

Damit können wir nun  $\epsilon_0$  in Abhängigkeit von der Krümmung wählen und folgendes Theorem beweisen:

**Theorem 4.3.4.** *Sei  $C$  ein beschränkter, streng konvexer Körper mit  $0 \in C$  und sei  $\Sigma = \partial C$  der glatte Rand von  $C$ , dessen Krümmungen durch  $\Pi_{max}$  und  $\Pi_{min}$  beschränkt sind. Sei  $A^*(C)$  die Hofer-Zehnder-Kapazität von  $C$  und sei  $\delta$  wie in (4.1). Dann existiert ein  $\epsilon_0$ , dass nur von  $\Pi_{max}$  und  $\Pi_{min}$  abhängt, sodass für alle Flusslinien  $\gamma$  des Reeb-Flusses gilt:*

*Wenn  $|\gamma(t_0) - \gamma(t_0 + T)| < \epsilon_0$  und  $\gamma(t_0), \gamma(t_0 + T)$  in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von  $\gamma \cap B_\delta(\gamma(t_0))$  liegen, dann gilt  $A(\gamma|_{[t_0, t_0 + T]}) > \frac{1}{2}A^*(C)$ , wenn  $C$  so im Raum liegt, dass  $\gamma(t_0) = \frac{1}{\Pi_{max}}N(t_0)$ .*

**Bemerkung.** Seien  $r_0 = \frac{1}{\Pi_{max}}, r_1 = \frac{1}{\Pi_{min}}$ . Da  $A^*$  eine Kapazität ist, gilt nach Lemma 4.1.1

$$\frac{\pi}{\Pi_{max}^2} = A^*(B_{r_0}) \leq A^*(C) \leq A^*(B_{r_1}) = \frac{\pi}{\Pi_{min}^2}.$$

*Beweis.* Wir bestimmen  $k$  wie in Lemma 4.3.3 und damit  $\epsilon_0$  wie in Lemma 4.3.2. Wir können durch verkleinern der Konstanten  $\epsilon_0$  und somit von  $\epsilon$ , davon ausgehen, dass das Intervall

$$\left[ \frac{\delta}{\delta - \epsilon}, \sqrt{\frac{A^*(C)}{\frac{1}{2}A^*(C) + \epsilon c_a}} \right]$$

nicht leer ist. Diese Änderung hängt wegen  $A^*(C) > \frac{\pi}{\Pi_{max}^2}$  nur von der Krümmung ab. Die Konstante  $c_a$  aus Satz 4.2.2 wird dabei nicht verändert.

Angenommen  $A(\gamma|_{[t_0, t_0 + T]}) \leq \frac{1}{2}A^*(C)$  und  $|\gamma(t_0) - \gamma(t_0 + T)| < \epsilon_0$ . Wir definieren wieder die Kurvenstücke  $\gamma_i$  und Zeitpunkte  $t_i \in [t_0, t_0 + T]$  wie oben. Sei  $i_0$  wie in Lemma 4.3.2. Dann wählen wir  $0 \leq i, j \leq i_0$ , sodass  $t_i < t_j, [t_i, t_j] \subset [t_0, t_0 + T]$  und

$$t_l \notin (t_i, t_j) \quad \forall l \leq i_0.$$

Dann erfüllt  $\gamma|_{[t_i-2\nu, t_j+2\nu]}$  die Voraussetzungen zum Verkleben, wie sie in Satz 4.2.1 gefordert sind. Wir konstruieren den konvexen Körper  $\tilde{C}$  und den geschlossenen Reeb-Orbit  $\tilde{\gamma}$  auf diesem Körper wie in Satz 4.2.1.

Wir behaupten, dass eine Konstante  $R$  existiert, sodass

$$C_R := \{Rx | x \in \tilde{C}\}$$

Obermenge von  $C$  ist. Außerdem ist

$$\gamma_R(t) := R\tilde{\gamma}(t)$$

bis auf Parametrisierung ein Reeb-Orbit auf  $C_R$  mit

$$A(\gamma_R) = R^2 A(\tilde{\gamma}) < A^*(C).$$

Sei

$$R \in \left( \frac{\delta}{\delta - \epsilon}, \sqrt{\frac{A^*(C)}{\frac{1}{2}A^*(C) + \epsilon c_a}} \right).$$

Da  $[t_i, t_j] \subset [t_0, t_0 + T]$  gilt somit

$$A(\gamma_R) = R^2 A(\tilde{\gamma}) < R^2 \left( \frac{1}{2}A^*(C) + c_a \epsilon \right) < A^*(C) \left( \frac{\frac{1}{2}A^*(C) + c_a \epsilon}{\frac{1}{2}A^*(C) + c_a \epsilon} \right) = A^*(C).$$

Damit ist der zweite Teil der Behauptung bewiesen. Zur besseren Übersicht sei o.B.d.A.  $t_i = 0$  und  $t_j - t_i = T$ . Dann ist die Kurve  $\gamma_R$  auf  $\mathbb{R}/[0, T]$  parametrisiert und wir können wie im Beweis von Satz 4.2.1 die Teilkurven  $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ ,  $N_1(t) = N(t)$ ,  $\gamma_2(t) = \gamma(T + t)$  und  $N_2(t) = N(T + t)$  verwenden. Wir zeigen nun zunächst, dass  $\gamma_R \cap C = \emptyset$ . Es gilt

$$\langle \gamma_R(t) - \gamma(t), N(t) \rangle > 0. \quad \text{für alle } t.$$

Für  $t \notin [-\nu, +\nu]$  ist dies klar, da hier  $\tilde{\gamma} = \gamma$  und da  $C$  konvex und damit sternförmig ist. Wegen der Lage von  $C$ , d.h.  $\gamma(t_0) = \frac{1}{\Pi_{max}} N(t_0)$ , folgt:

$$\langle N(t), \gamma(t) \rangle > \langle N(t), \gamma(t_0) \rangle + \langle N(t), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle > \frac{1}{2\Pi_{max}} \geq \delta$$

für  $t \in [-\nu, \nu]$ . Damit gilt auch für  $t \in [-\nu, \nu]$

$$\begin{aligned} \langle \gamma_R(t) - \gamma_1(t), N_1(t) \rangle &= \langle R\tilde{\gamma}(t) - \gamma_1(t), N_1(t) \rangle \\ &= \langle R(\eta\gamma_1(t) + (1-\eta)\gamma_2(t)) - \gamma_1(t), N_1(t) \rangle \\ &= R(1-\eta) \langle \gamma_2(t) - \gamma_1(t), N_1(t) \rangle \\ &\quad + (R-1) \langle \gamma_1(t), N_1(t) \rangle \\ &> -R\epsilon + (R-1)\delta \\ &> 0 \quad \Leftrightarrow \quad R > \frac{\delta}{\delta - \epsilon}. \end{aligned}$$

Wir benötigen im Folgenden, dass auch  $\langle \gamma_R(t) - \gamma_2(t), N_2(t) \rangle > 0$ . Der Beweis läuft analog. Sei  $N_R(t) = \tilde{N}(t)$  die äußere Einheitsnormale an  $C_R$  in  $\gamma_R(t)$ .

Wir zeigen nun, dass für alle  $t \in [0, T]$  ein  $t' \in [0, T]$  existiert, sodass

$$\langle \gamma_R(t) + W - \gamma(t'), N(t') \rangle > 0 \text{ für } W \perp_{\mathbb{R}} N_R(t).$$

Bei  $t \notin [-\nu, \nu]$  ist das klar, da dort  $\gamma_R(t) = R\gamma(t)$  und  $N_R(t) = N(t)$  ist. Sei also  $t \in [-\nu, \nu]$ . Es gilt

$$\langle \gamma_R(t) + W - \gamma_1(t), N_1(t) \rangle = \underbrace{\langle \gamma_R(t) - \gamma_1(t), N_1(t) \rangle}_{>0} + \langle W, N_1(t) \rangle.$$

Wir können uns auf den Fall  $\eta(t) \neq 0$  beschränken und unterdrücken ab jetzt das Argument von  $\eta$ . Angenommen  $\langle W, N_1(t) \rangle < 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle W, N_1(t) \rangle &= \frac{1}{\eta} \langle W, \eta N_1(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\eta} \langle W, \eta N_1(t) - (1 - \eta) N_2(t) + (1 - \eta) N_2(t) \rangle \\ &= -\frac{1}{\eta} (1 - \eta) \langle W, N_2(t) \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\langle \gamma_R(t) + W - \gamma_2(t), N_2(t) \rangle > 0.$$

Das heißt, für alle  $t \in \mathbb{R}/[0, T]$ ,  $W \in N_R(t)^\perp$  gibt es ein  $t'$ , sodass

$$\langle \gamma_R(t) + W - \gamma(t'), N(t') \rangle > 0.$$

Damit liegen die Ränder aller  $C_R$  erzeugenden Halbräume außerhalb von  $C$  und somit gilt  $C \subset C_R$ . Dann gilt aber  $c_{HZ}(C) < c_{HZ}(C_R)$ . Dies steht aber im Widerspruch zu  $c_{HZ}(C_R) \leq A(\gamma_R) < A^*(C) = c_{HZ}(C)$ .  $\square$

**Korollar 4.3.5.** *Sei  $\gamma$  der Reeb-Orbit mit minimaler Wirkung auf  $\Sigma$ . Dann ist  $|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| > \epsilon_0$  für alle  $t_0, t_1$ , sodass  $\gamma(t_0)$  und  $\gamma(t_1)$  sowohl in  $B_\delta(\gamma(t_0)) \cap \gamma$  als auch in  $B_\delta(\gamma(t_1)) \cap \gamma$  in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen.*

*Beweis.* Angenommen es existieren entsprechende  $t_0, t_1$ , sodass  $|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| \leq \epsilon_0$ . Dann erfüllen  $\gamma|_{[t_0, t_1]}$  und  $\gamma|_{[t_1, t_0]}$  die Voraussetzungen von Theorem 4.3.4. Daher gilt nach der passenden Wahl des Nullpunktes  $A(\gamma|_{[t_1, t_0]})$ ,  $A(\gamma|_{[t_0, t_1]}) > \frac{1}{2}A^*(C)$ . Allerdings gilt auch

$$A^*(C) = A(\gamma) = A(\gamma|_{[t_1, t_0]}) + A(\gamma|_{[t_0, t_1]}) > A^*(C).$$

Das ist ein Widerspruch.  $\square$

# Kapitel 5

## Stabilität

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{C}$  die Menge aller beschränkten konvexen Gebiete mit glattem Rand  $\partial C$  in  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ , die den Nullpunkt enthalten. Für alle  $C \in \mathcal{C}$  existiert eine glatte streng konvexe Funktion  $f_C : \mathbb{C}^2 \rightarrow [0, \infty)$ , mit  $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$  für alle  $x \neq 0$ , alle  $\lambda > 0$ , sodass  $\partial C = f_C^{-1}(1)$ . Man beachte, dass in dieser Notation die Sphäre  $S^3$  durch die Funktion  $f_0(x) = \|x\|^2$  definiert wird. Die Funktion  $f_C$  ist eindeutig durch  $C$  definiert. Wir statten  $\mathcal{C}$  mit der  $C^4$ -Norm  $\|\cdot\|_{C^4}$  angewendet auf die Einschränkung der Funktionen  $\log f_C$  auf die Sphäre  $S^3$  aus. Im Folgenden unterscheiden wir nicht immer zwischen dem Gebiet  $C \in \mathcal{C}$  und der definierenden Funktion  $f_C$ , das heißt wir betrachten  $\|\cdot\|_{C^4}$  als Abstandsfunktion auf  $\mathcal{C}$ . In diesem Sinne bezeichnen wir für  $R > 0$  mit  $B(S^3, R)$  den Ball vom Radius  $R$  um  $S^3$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{C^4}$ . Für ein  $\epsilon > 0$  sagen wir eine beschränkte konvexe Menge  $D$  in  $\mathbb{R}^4$  mit glattem Rand  $\partial D$  ist  $\epsilon$ -nahe an  $C$  in der  $C^4$ -Topologie, wenn  $\|f_C - f_D\|_{C^4} < \epsilon$ , d.h. die Einschränkungen von  $f_C, f_D$  auf  $S^3$  sind  $\epsilon$ -nahe in der  $C^4$ -Topologie. Wir nennen einen geschlossenen Orbit auf dem Rand  $\partial C$  eines konvexen Körpers  $C$  *minimal*, wenn dessen Wirkung minimal unter den Wirkungen aller geschlossenen Orbits auf  $\partial C$  ist. Hofer und Zehnder zeigten in [HZ90], dass die Wirkung des minimalen Orbits auf  $\partial C$  mit dem Wert einer symplektischen Kapazität übereinstimmt, die *Hofer-Zehnder-Kapazität* heißt und mit  $c_{HZ}$  bezeichnet wird. Hermann [Her00] zeigte, dass diese Kapazität für beschränkte Gebiete  $D$  mit Rand vom eingeschränkten Kontakt-Typ nicht größer ist, als die Verschiebe-Energie. Ein *Ellipsoid*  $E(r, R)$  ist ein konvexer Körper in  $\mathbb{R}^4$ , der sich als Einheitsball der quadratischen Form

$$q(r, R)(z_1, z_2) = \|z_1\|^2/r^2 + \|z_2\|^2/R^2 \quad (5.1)$$

darstellen lässt, wobei  $R \geq r > 0$ . Es ist bekannt, dass für Ellipsoide alle Kapazitäten übereinstimmen. Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass dies auch für kleine Deformationen von Ellipsoiden gilt. Wir zeigen

**Satz 5.0.6.** *Sei  $E(r, R) \subset \mathbb{R}^4$  ein Ellipsoid.*

1. *Es existiert eine Umgebung  $U$  von  $E(r, R)$  in der  $C^4$ -Topologie, sodass  $c_{HZ}(C) = c_p(C)$  für alle  $C \in U$  gilt.*
2. *Wenn  $R > r$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $E(r, R)$  in der  $C^4$ -Topologie, sodass  $c_0(C) = c_{HZ}(C)$  für alle  $C \in U$ .*

Zum Beweis beginnen wir mit folgender Betrachtung.

**Lemma 5.0.7.** *Für alle  $C \in \mathcal{C}$  und alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft. Wenn  $D \in \mathcal{C}$  in der  $C^4$ -Topologie  $\delta$ -nahe an  $C$  liegt, dann ist jeder minimale Orbit auf  $\partial D$   $\epsilon$ -nahe an einem minimalen Orbit auf  $\partial C$  in der  $C^{3,\text{Lip}}$ -Topologie.*

*Beweis.* Sei  $C \in \mathcal{C}$  und wir nehmen gegenteilig an, dass es ein  $\epsilon > 0$  gibt, sodass kein  $\delta > 0$  existiert, wie im Lemma behauptet. Dann existiert eine Familie  $C_i \subset \mathcal{C}$  beschränkter konvexer Gebiete mit glattem Rand  $\partial C_i$  die gegen  $C$  in der  $C^4$ -Topologie konvergieren. Für jedes  $i$  existiert ein minimaler Orbit  $\gamma_i$  auf  $\partial C_i$ , dessen  $C^{3,\text{Lip}}$ -Abstand zu jedem minimalen Orbit auf  $\partial C$  größer als  $\epsilon$  ist. Die Wirkung der  $\gamma_i$  ist gleich der Hofer-Zehnder-Kapazität  $c_{HZ}(C_i)$  der  $C_i$ . Das heißt die Wirkungen der  $\gamma_i$  sind uniform beschränkt. Nach Annahme sind die Gradienten  $\nabla f_{C_i}$  der Funktionen  $f_{C_i}$ , die die  $C_i$  definieren, uniform beschränkt in der  $C^2$ -Norm. Der geschlossene Orbit  $\gamma_i$  auf  $\partial C_i$  ist eine Lösung der Gleichung  $\nabla f_{C_i}(\gamma_i) = J\gamma_i'$  wobei  $J$  die standard komplexe Struktur auf  $\mathbb{C}^2$  ist. Die Perioden der Orbits  $\gamma_i$  sind uniform beschränkt, da dies auch für deren Wirkungen gilt. Daher sind die  $C^{3,\text{Lip}}$ -Normen der Kurven  $\gamma_i$  uniform beschränkt. Nachdem wir uns auf eine Teilfolge beschränken, können wir nach Ascolis Theorem annehmen, dass die Kurven  $\gamma_i$  in  $C^{3,\text{Lip}}$  gegen eine geschlossene Kurve  $\gamma$  konvergieren. Diese Kurve ist notwendigerweise ein geschlossener Orbit auf  $C$ , dessen Wirkung gleich dem Grenzwert der Wirkungen der  $\gamma_i$  ist. Für  $\lambda > 0$  gilt nun  $c_{HZ}(\lambda C) = \lambda^2 c_{HZ}(C)$ . Andererseits existiert für alle  $\alpha > 0$  ein  $i_0 > 0$ , sodass  $(1 - \alpha)C \subset C_i \subset (1 + \alpha)C$  für alle  $i \geq i_0$ . Daher gilt  $c_{HZ}(C) = \lim_{i \rightarrow \infty} c_{HZ}(C_i)$  und somit ist die Wirkung von  $\gamma$  minimal. Dies ist ein Widerspruch, der das Lemma beweist.  $\square$

Eine *symplektische Scheibe* in  $\mathbb{C}^2$  ist das Bild einer glatten Einbettung  $\phi : D \rightarrow \mathbb{C}^2$ , mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung von  $\omega$  auf  $\phi(D)$  eine Volumenform auf  $\phi(D)$  ist. Wir nennen  $D$  *speziell*, wenn für alle  $z$  im Rand von  $D$  die Tangentialebene von  $D$  in  $z$  eine komplexe Ebene in  $T\mathbb{C}^2$  ist. Für  $\epsilon > 0$  bezeichnen wir eine Isotopie  $\phi_s$  von  $\phi$  ( $s \in [0, 1]$ ) als  $\epsilon$ -klein in der  $C^{n,1}$ -Topologie, wenn die  $C^{n,1}$ -Normen der partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial s} f_s$  von oben durch  $\epsilon$  beschränkt sind. Wir benötigen folgendes Lemma.

**Lemma 5.0.8.** *Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  eine Scheibe mit glattem Rand  $\partial D$  und sei  $\epsilon > 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft. Wenn  $\gamma$  eine glatte, einfach geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2$  ist, die in der  $C^{3,1}$ -Topologie  $\delta$ -nahe an  $\partial D$  liegt, sodass die Fläche der Kreisscheibe  $E$ , die von  $\gamma$  berandet wird, gleich der Fläche von  $D$  ist, dann existiert eine, in der  $C^{3,1}$ -Topologie  $\epsilon$ -kleine, volumenerhaltende Isotopie  $\phi_s$  der Identität, sodass  $\phi_1 D = E$ .*

*Beweis.* Nach Mosers Resultat können wir annehmen, dass eine Tubenumgebung  $N$  von  $\partial D$  in  $\mathbb{R}^2$  existiert mit Koordinaten  $(r, \theta)$  ( $-2r_0 \leq r \leq 2r_0, \theta \in S^1$ ), so dass  $\partial D = \{r = 0\}$  und dass die Volumenform in diesen Koordinaten die Form  $dr \wedge d\theta$  hat. Eine einfach geschlossene Kurve  $\gamma$ , die in der  $C^{3,1}$ -Topologie genügend nahe an  $\partial D$  ist und die eine Scheibe mit der gleichen Fläche wie  $D$  berandet, kann als Graph einer Funktion  $h : S^1 \rightarrow (-r_0, r_0)$  mit  $\int h = 0$  dargestellt werden. Für alle  $s \in [0, 1]$  schließt die Kurve definiert durch  $sh$  die gleiche Fläche wie  $D$  ein. Wähle eine glatte Funktion  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit  $\rho(t) = 1$  für  $t$  nahe 0. Definiere eine Isotopie  $\psi_s$  der Identität durch  $\psi_s(r, \theta) = (r + \rho(r)sh(\theta), \theta)$ . Sei  $\omega_s$

der Pull-back der Volumenform  $\omega_0$  auf  $\mathbb{R}^2$  durch  $\psi_s$ . Dann gilt  $\omega_s = \det(d\psi_s)\omega$ . Da

$$\frac{\partial}{\partial r}\psi_s(r, \theta) = (1 + sh(\theta))\frac{\partial}{\partial r}\rho, 0)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\psi_s(r, \theta) = (s\frac{d}{d\theta}h(\theta), 1)$$

folgern wir, dass  $\frac{\partial}{\partial s}\omega_s$  abhängig von  $h$  klein in der  $C^{3,1}$ -Norm ist. Darüberhinaus verschwindet  $\frac{\partial}{\partial s}\omega_s$  nahe  $\partial D$ . Dann existiert eine  $C^{3,1}$ -kleine Familie  $\alpha_s$  von Eins-Formen mit  $d\alpha_s = \frac{\partial}{\partial s}\omega_s$ , die sämtlich nahe  $\partial D$  verschwinden. Wir definieren ein zeitabhängiges glattes Vektorfeld  $Y_s$  durch  $\iota_{Y_s}\omega_s = -\alpha_s$ . Dieses Vektorfeld ist klein in der  $C^{3,1}$ -Norm. Wir benutzen  $Y_s$ , um einen  $C^{3,1}$ -kleinen Fluss zu konstruieren, dessen Verknüpfung mit  $\psi_s$  eine  $C^{3,1}$ -kleine Isotopie von  $D$  auf die von  $\gamma$  berandete Scheibe ist.  $\square$

Wir benutzen Lemma 5.0.8, um Folgendes zu zeigen.

**Lemma 5.0.9.** *Sei  $\phi_0 : D \rightarrow \mathbb{C}^2$  eine spezielle symplektische Scheibe und sei  $\epsilon > 0$ . Wenn  $\gamma$  genügend nahe an  $\partial D$  in der  $C^{3,1}$ -Topologie liegt und wenn die Wirkung von  $\gamma$  mit der von  $\partial D$  übereinstimmt, dann existiert eine Isotopie von  $\phi_0$  zu einer speziellen symplektischen Scheibe mit Rand  $\gamma$ , die  $\epsilon$ -klein in der  $C^{2,1}$ -Topologie ist.*

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $D_0 = \phi_0(D)$  eine kompakte Teilscheibe einer größeren symplektischen Scheibe  $E_0$  ist und dass deren Fläche gleich  $2\pi$  ist. Die senkrechte Exponentialabbildung auf  $E_0$  ist glatt und definiert eine glatte Projektion  $\pi$  einer Umgebung  $N$  von  $D_0$  in  $\mathbb{C}^2$  auf  $E_0$ . Wenn die Kurve  $\gamma$  in  $N$  enthalten ist, dann ist die Projektion  $\pi\gamma$  von  $\gamma$  nach  $E_0$  definiert und wenn  $\gamma$  in der  $C^{3,1}$ -Topologie nahe an  $\partial D_0$  ist, so gilt das gleiche für dessen Projektion  $\pi(\gamma)$ . Genauer ist  $\pi\gamma$  eine Jordankurve, die eine Scheibe  $D_1$  in  $E_0$  berandet. Sei  $\text{area}(\pi\gamma)$  die Fläche der Scheibe, die von  $\pi\gamma$  eingeschlossen wird. Wir deformieren  $\pi\gamma$  zu einer Kurve, sodass diese eine Scheibe mit gleicher Fläche wie  $D$  berandet. Wie im Beweis zu Lemma 5.0.8 wählen wir Koordinaten auf  $E_0$  nahe  $\partial D$ , sodass die Volumenform in diesen Koordinaten als  $dr \wedge d\theta$  geschrieben werden kann. Die Kurve  $\pi\gamma$  kann als Graph einer  $C^{3,1}$ -kleinen Funktion  $h$  über  $\partial D$  beschrieben werden. Definiere  $\tilde{h} = h - \int h(\theta)d\theta$  und sei  $D_1$  die Scheibe definiert durch  $\tilde{h}$ . Es folgt aus Lemma 5.0.8, dass  $D$  mit einer  $C^{3,1}$ -kleinen Isotopie in  $D_1$  verschoben werden kann. Als nächstes verwenden wir die Funktion  $h$ , um eine  $C^{2,1}$ -kleine Isotopie der Scheibe  $D_1$  zu einer speziellen symplektischen Scheibe, die  $\gamma$  berandet, zu konstruieren, indem wir die Funktion, die unseren Graphen definiert zu einer Funktion auf der Scheibe mit gleichen Schranken erweitern. Die resultierende Abbildung ist nicht notwendig volumenerhaltend, kann aber mit Lemma 5.0.8 und dessen Beweis zu einer solchen verändert werden.  $\square$

Für ein beschränktes konvexes Gebiet  $C \in \mathcal{C}$  und einen minimalen Orbit  $\gamma$  auf  $\partial C$  sei  $C(\gamma)$  die Vereinigung der komplexen Ebenen im Tangentialraum von  $\partial C$  entlang  $\gamma$ . Man beachte, dass  $C(\gamma)$  nicht notwendig eine glatte Hyperfläche von  $\mathbb{C}^2$  ist. Es gilt:

**Lemma 5.0.10.** *Zu  $R > 0$  existiert eine Zahl  $\kappa = \kappa(R_0) > 0$ , sodass für alle  $C \in B(R_0)$  und alle minimalen Orbits  $\gamma$  auf  $\partial C$  der Abstand zwischen den singulären Punkten auf  $C(\gamma)$  und  $C$  mindestens  $\kappa$  ist.*

*Beweis.* Erneut führen wir einen Widerspruch herbei. Angenommen das Lemma gilt nicht. Dann existiert eine Folge  $C_i \subset B(R_0)$  und eine Folge minimaler Orbits  $\gamma_i$ , sodass der Abstand zwischen  $C_i$  und der singulären Menge von  $C_i(\gamma_i)$  gegen Null geht, wenn  $i \rightarrow \infty$ . Wie oben nehmen wir an, nachdem wir zu einer Teilfolge übergegangen sind, dass  $C_i \rightarrow C, \gamma_i \rightarrow \gamma$ , wobei  $C$  ein beschränkter konvexer Körper mit  $C^{2,\text{Lip}}$ -Rand ist und  $\gamma$  ein minimaler Orbit darauf. Aber  $\gamma_i \rightarrow \gamma$  in der  $C^{3,1}$ -Topologie. Daher  $C(\gamma_i) \rightarrow C(\gamma)$  in der Chabauty Topologie für geschlossene Teilmengen von  $\mathbb{C}^2$ . Aber  $\partial C$  hat keine singulären Punkte, was ein Widerspruch ist.  $\square$

Sei nun  $C$  ein beschränkter konvexer Körper in der in Satz 5.0.6 angesprochenen kleinen Umgebung  $U$  von  $E$ . Um Satz 5.0.6 zu beweisen, konstruieren wir einen Symplektomorphismus

$$\Psi : (\mathbb{C}^2, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \omega_0)$$

der  $C$  in den Zylinder  $Z$  mit der gleichen Hofer-Zehnder-Kapazität abbildet. Wenn  $R > r$  ist, gilt außerdem, dass das Bild von  $C$  den Standardball  $B$  mit  $c_{HZ}(B) = c_{HZ}(C)$  enthält.  $\Psi$  wird in drei Schritten konstruiert. Zuerst konstruieren wir eine symplektische Isotopie von der Standardscheibe in  $Z$  auf die symplektische Scheibe, die vom minimalen Orbit  $\gamma$  von  $C$  berandet wird. Dann weiten wir diese Symplektomorphismen auf eine besondere Umgebung der Scheibe aus. Letztendlich erweitern wir sie weiter auf ganz  $\mathbb{C}^2$ . Da wir den Moser-Trick mehrfach anwenden, müssen wir im Nachhinein gewährleisten, dass das Bild von  $C$  im Zylinder liegt und den Ball enthält.

*Beweis von Satz 5.0.6.* Sei  $R_0 > 0$  klein. Wähle  $\kappa(R_0)$  wie in Lemma 5.0.10 und  $\epsilon \ll R_0$  beliebig klein. Sei  $C$  ein beschränkter streng konvexer Körper in  $\mathbb{C}^2$ ,  $\epsilon$ -nahe an einem Ellipsoiden  $E(r, R)$  in der  $C^4$ -Topologie. Wir nehmen an, dass das Ellipsoid die Standardform, definiert als Einheitsball der quadratischen Form gegeben durch (5.1), hat. Wir können ebenfalls annehmen, dass  $c_{HZ}(E) = c_{HZ}(C) = 1$ , d.h.  $r = 1$ . Sei  $Z_1 = D_1 \times \mathbb{C}$  der Standardzylinder. Bezeichne mit

$$\gamma_0 : S^1 \rightarrow E \text{ und } \gamma_1 : S^1 \rightarrow C$$

die minimalen Reeb-Orbits von  $E$  und  $C$ . Wie in Lemma 5.0.9 bewiesen können wir eine Familie  $\phi_s$  von speziellen symplektischen Scheiben mit konstanter Oberfläche wählen, sodass  $\phi_0$  die Standardscheibe ist, die  $\gamma_0$  berandet, und  $\phi_1$   $\gamma_1$  berandet. Weiter wissen wir, dass  $\|\frac{\partial}{\partial s}\phi_s\|_{C^{2,1}} < \epsilon$ . Nach Lemma 5.0.8 und dessen Beweis finden wir  $C^{2,1}$ -kleine Reparametrisierungen  $\chi_s : D^2 \rightarrow D^2$ , sodass  $\psi_s := \phi_s \circ \chi_s$  symplektomorphe Einbettungen sind. Man beachte, dass die Familie von Symplektomorphismen  $\|\frac{\partial}{\partial s}\psi_s\|_{C^{2,1}} < \epsilon$  erfüllt. Wir können diese Familie auf eine größere flache Scheibe  $D$  mit den gleichen Eigenschaften ausweiten. Das war der erste Schritt unserer Konstruktion. Im zweiten weiten wir  $\psi_s$  auf eine Umgebung von  $D \times \{0\}$  aus. Um dies zu tun, betrachten wir das symplektische Normalenbündel  $TD_s^\omega$  von  $D_s := \psi_s(D)$ ,

$$T_p D_s^\omega := \{V \in \mathbb{C}^2 \mid \omega_0(V, X) = 0 \text{ für alle } X \in T_p D_s\}.$$

Sei  $\gamma_S := \psi_s(\partial D)$ . Da  $D_s$  spezielle symplektische Scheiben sind, sind die symplektischen Komplemente von  $TD_s|_{\gamma_s}$  gegeben durch die komplexen Ebenen

orthogonal zu  $\dot{\gamma}_s$ . Wir trivialisieren  $TD_s^\omega$  indem wir eine symplektische Basis  $M_s^1, M_s^2$  von  $TD_s^\omega$  so wählen, dass

$$\|M_s^1 - e_3\|_{C^{1,1}} < \epsilon, \|M_s^2 - e_4\|_{C^{1,1}} < \epsilon.$$

Das ist möglich, weil  $\psi_s$   $C^{2,1}$ -nahe an der Identität ist. Wir können die Einbettungen

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_s : N &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ p + v_1 e_1 + v_2 e_2 &\mapsto \psi_s(p) + v_1 M_1(\psi_s(p)) + v_2 M_2(\psi_s(p)) \end{aligned}$$

definieren, wobei  $N$  eine kleine Umgebung von  $D^2 \cup \{(S^1, v) | v_1^2 + v_2^2 < \kappa^2\}$  ist, mit  $\kappa$  wie in Lemma 5.0.10. Wir fordern, dass, wenn  $(p, v) \in N$ , so gilt auch  $(p, rv) \in N$  für  $r \in [0, 1]$ . Mit  $c := (1 + \kappa)$  erhalten wir

$$\|\tilde{\phi}_s - id\|_{C^{1,1}} < c\epsilon \text{ und } \|\omega_s - \omega_0\|_{C^{0,1}} < c^2\epsilon,$$

wobei  $\omega_s := \tilde{\phi}_s^* \omega_0$ . Wir werden die Konstante  $c$  während dieser Rechnung weiter anpassen, ohne es jedesmal zu erwähnen. Wir wissen weiter, dass  $\omega_s - \omega_0|_D = 0$ . Um  $\tilde{\phi}_s$  auf vernünftige Weise symplektisch zu machen, müssen wir  $\omega_s - \omega_0$  punktweise abschätzen. Nach Definition von  $\tilde{\phi}_s$  wissen wir, dass

$$\omega_0(e_3, e_4) = \omega_s(e_3, e_4) = 1,$$

und wir erhalten  $|(\omega_s - \omega_0)|_{(p,v)}| < c\epsilon|v|$ . Sei  $\tau_s := \omega_s - \omega_0$ . Wir definieren weiter

$$\begin{aligned} \eta_r : N &\rightarrow N, r \in [0, 1] \\ (p, v) &\mapsto (p, rv). \end{aligned}$$

Dann ist  $\eta_r$  der Fluss von  $X_r(p, v) := \frac{1}{r}(0, v)$ . Zusätzlich wissen wir

$$\begin{aligned} \tau_s|_{(p,v)} &= \eta_1^* \tau_s - \eta_0^* \tau_s = \int_0^1 \partial_r \eta_r^* \tau_s = d \int_0^1 i_{X_r} \eta_r^* \tau_s \\ &= d \int_0^1 \frac{1}{r} \tau_s(d\eta_r v, \cdot) = di_v \tau_s|_{(p,v)}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Erneut müssen wir die Differentialgleichung

$$i_v \tau_s + i_{Y_r^s}(\omega_0 + r di_v \tau_s) = 0 \tag{5.3}$$

lösen. Da

$$|\tau_s|_{(p,v)}| < c|v|\epsilon \text{ und } \|\tau_s\|_{C^{0,1}} < c\epsilon,$$

erhalten wir mit (5.2)

$$|i_v \tau_s|_{(p,v)}| < c|v|^2\epsilon \text{ und } \|i_v \tau_s\|_{C^{1,1}} < c\epsilon,$$

wenn wir  $c$  entsprechend anpassen. Für  $Y_r^s$  folgt

$$|Y_r^s(p, v)| < c|v|^2\epsilon \text{ und } \|Y_r^s\|_{C^{0,1}} < c\epsilon.$$

Verkleinern wir  $N$ , so können wir  $\tilde{\chi}_s : N \rightarrow \mathbb{C}^2$  durch den Fluss von  $Y_r^s$  nach der Zeit Eins definieren. Dann gilt

$$|\tilde{\chi}_s(p, v) - (p, v)| < c\epsilon|v|^2$$

und  $\tilde{\psi}_s := \tilde{\phi}_s \circ \tilde{\chi}_s : N \rightarrow \mathbb{C}^2$  sind symplektische Einbettungen. Durch Ableiten von (5.3) nach  $s$  erhalten wir

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\psi}_s(p, v) \right\|_{C^{0,1}} < c\epsilon.$$

Im dritten Schritt erweitern wir diese Symplektomorphismen zu einer Familie von Diffeomorphismen  $\Phi_s$  auf einem großen 4-Ball, der  $C$  enthält, sodass  $\Phi_s = id$  in einer Umgebung des Randes des Balls und

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} \Phi_s \right\|_{C^{0,1}} < c\epsilon.$$

Weiter betten wir diesen Ball symplektisch in eine große Vier-Sphäre ein und erweitern  $\Phi_s$  durch die Identität zu Diffeomorphismen auf der Sphäre. Wir betrachten die Formen  $\omega_0$  und  $\omega_s = \Phi_s^* \omega_0$ , die auf  $N$  übereinstimmen. Weiter wissen wir, da  $\Phi_s$  eine glatte Familie ist, dass

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} \omega_s \right\|_{C^0} < c\epsilon.$$

Weil  $\omega$  und  $\omega_s$  auf  $N$  übereinstimmen, wissen wir, dass  $\tau_s := \frac{\partial}{\partial s} \omega_s$  eine geschlossene Form ist, die eine Kohomologieklass in  $H^2(S^4, N)$  darstellt.  $N$  ist kontrahierbar, d.h.  $H^2(S^4, N) = 0$ . Somit erhalten wir  $[\tau_s] = 0 \in H^2(S^4, N)$ . Die Hodge-Theorie liefert uns

$$\tau_s = d\sigma_s$$

für ein  $\sigma_s$  mit  $\|\sigma_s\|_{C^1} < c\epsilon$ . Wir lösen erneut

$$\sigma_s + iY_s \omega_s = 0$$

und erhalten Diffeomorphismen  $\Xi_s : S^4 \rightarrow S^4$  mit  $|\Xi_s - id| < \epsilon c$  und  $\Xi_s|_N = id$ , sodass  $\Psi_1 := \Xi_1 \circ \Phi_1$  ein Symplektomorphismus ist. Nun müssen wir verifizieren, dass das Urbild von  $C$  unter  $\Psi_1$  in  $Z_1$  liegt und  $B_1$  enthält, falls  $r < R$ . Für den Rest des Beweises unterdrücken wir den Index 1. Wir betrachten zunächst die Abbildung  $\tilde{\psi} := \tilde{\phi} \circ \tilde{\chi}$ , die im zweiten Schritt definiert wurde.  $\tilde{\phi}$  bildet  $N$  nach  $\mathbb{C}^2$  ab durch die Abbildung

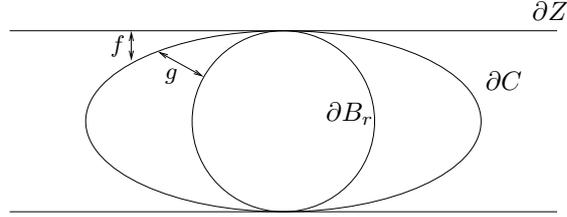
$$\tilde{\phi}(p, v) = \phi(p) + v_1 M^1(p) + v_2 M^2(p)$$

Der Rand von  $Z$  wird auf eine Fläche außerhalb des Inneren von  $C$  und  $D_1 \times \{0\}$  abgebildet. Daher liegt das Urbild von  $C$  unter  $\tilde{\phi}$  in  $Z$ . Da  $|\tilde{\chi}(p, v) - (p, v)| < c\epsilon|v|^2$  genügt es zu zeigen, dass wenn  $\tilde{\phi}(p, v) \in \partial C$ , dann

$$\text{dist}((p, v), \partial Z) > c_2|v|^2, \quad (5.4)$$

wobei  $c_2$  eine Konstante mit  $c_2 > c\epsilon$  ist. Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, müssen wir zeigen, dass

$$\text{dist}((p, v), B) > c_2|v|^2, \quad (5.5)$$

Abbildung 5.1: Die Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$ 

wenn  $R > r$  und  $\tilde{\phi}(p, v)$  auf den Rand von  $C$  liegt. Nach Konstruktion ist das Urbild  $\tilde{\phi}^{-1}(C)$  von  $C$  ein konvexer Körper  $C^{1,1}$ -nahe am Ellipsoiden  $E(r, R)$ . Weiter wissen wir, dass  $\tilde{\phi}^{-1}(C)$  den Zylinder entlang des minimalen Orbits  $\gamma$  von  $E$  berührt. Wir machen folgende Betrachtung. Sei  $x = (x_1, x_2)$  ein Punkt in  $\tilde{\phi}^{-1}(\partial C) \subset \mathbb{C}^2$ . Sei  $z$  der Punkt im Rand des Zylinders, der  $x$  am nächsten ist. Dann liegt  $z$  in der reellen Zwei-Ebene gegeben durch  $\mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2$ . Um die obige Abschätzung zu beweisen, genügt es, den Schnitt von  $Z$  und  $\tilde{\phi}^{-1}(C)$  mit den reellen Zwei-Ebenen  $P_{u,v} := \mathbb{R}(u, 0) + \mathbb{R}(0, v)$ ,  $u, v \in S^1$  zu betrachten. Nach Konstruktion ist der Schnitt von  $\tilde{\phi}^{-1}(C)$  mit einer solchen Ebene  $C^{1,1}$ -nahe an einer Ellipse. Bezüglich der Koordinaten  $\{(u, 0), (0, v)\}$  der Ebene ist diese Ellipse gegeben durch

$$\frac{x_1^2}{r^2} + \frac{x_2^2}{R^2} = 1,$$

wobei  $r, R$  die Radien sind, die den Ellipsoiden  $E$  definieren. Die Punkte, an denen  $\gamma$  die Ebene schneidet, sind durch  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$  gegeben. Da  $\tilde{\phi}^{-1}(C)$   $C^{1,1}$ -nahe an einem Ellipsoiden ist, existiert eine Konstante  $\delta$ , sodass, wenn  $\text{dist}(x, \gamma_0) < \delta$  für  $x \in \tilde{\phi}^{-1}(\partial C) \cap P_{u,v}$ , dann gilt für die äußere Normale  $N_x$  von  $\tilde{\phi}^{-1}(\partial C) \cap P_{u,v}$  in  $x$ , dass

$$\langle N_x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^2} > \frac{1}{2}.$$

Da  $\tilde{\phi}^{-1}(C)$  nahe an  $E$  ist, können wir  $\epsilon$  so anpassen, dass (5.4) und (5.5) für alle  $x \in \tilde{\phi}^{-1}(\partial C)$  gelten, wenn  $\text{dist}(x, \gamma_0) \geq \delta$ . Sei nun

$$c : [0, T] \rightarrow \tilde{\phi}^{-1}(\partial C) \cap P_{u,v}$$

eine Kurve, parametrisiert nach Bogenlänge, die im Punkt  $(1, 0) \in P_{u,v}$  beginnt. Sei  $x = (x_1, x_2)$  mit  $\text{dist}(x, \gamma) < \delta$  der Endpunkt der Kurve. Dann gilt

$$\frac{T}{2} < x_2 < T. \quad (5.6)$$

Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto 1 - \langle c(t), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Der Wert dieser Funktion ist der Abstand von  $c(t)$  zum Rand des Zylinders. Daher und mit (5.6) genügt es zu zeigen, dass

$$f(t) > c_2 t^2.$$

Da  $f(0) = f'(0) = 0$  wissen wir

$$f(t) = \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)t^2, \quad \text{für ein } \xi \in [0, t].$$

Da  $\tilde{\phi}^{-1}(\partial C) \cap P_{u,v}$   $C^{1,1}$ -nahe an einer Ellipse ist, wissen wir, dass in einer  $\delta$ -Umgebung die Krümmung  $K$  von  $c$  durch Konstanten  $\frac{1}{r} > k_1 > K > k_2 > 0$  beschränkt ist, wobei die erste Ungleichung genau dann gilt, wenn  $R > r$ . Benutzen wir diese Konstanten, so können wir  $f^{(2)}$  abschätzen. Nahe  $\xi$  ist die Funktion  $f(\xi + \tau)$  gegeben durch

$$f(\xi + \tau) = 1 - \langle c(\xi), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle - \tau \langle \dot{c}(\xi), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle - \frac{\tau^2}{2} \langle \ddot{c}(\xi), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + o(\tau^2).$$

Daraus folgt

$$f^{(2)}(\xi) = -\langle \ddot{c}(\xi), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle. \quad (5.7)$$

Da  $\langle N_{c(\xi)}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle > \frac{1}{2}$ , erhalten wir

$$f(t) > \frac{k_2}{2}t^2.$$

Mit (5.6) beweist dies (5.4). Wir nehmen nun an, dass  $R > r$ . Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} g : [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto |c(t)| - r. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist die Abstandsfunktion von Punkten  $c(t)$  zum Ball mit Radius  $r = 1$ . Es gilt

$$g(0) = 0, \dot{g}(0) = 0.$$

Durch Taylor-Entwicklung folgt

$$g(t) = \frac{t^2}{2}\ddot{g}(\xi), \quad \text{für ein } \xi \in [0, t].$$

Wir zeigen, dass  $\ddot{g}$  größer als eine Konstante ist. Ableiten liefert

$$\ddot{g}(t) = \frac{1 + \langle \ddot{c}, c \rangle}{|c|} - \frac{\langle \dot{c}, c \rangle^2}{|c|^3}.$$

Da die Krümmung von  $c$  immer größer als  $\frac{1}{r}$  ist, hat  $g(t)$  ein Minimum in 0. Nach der Wahl von  $\delta$  hat  $g(t)$  keinen weiteren kritischen Punkt, da in einem Maximum die Krümmung  $\kappa$  von  $c$  größer als  $\frac{1}{r}$  sein muss. Daher erhalten wir  $|c(t)| > r$  für alle  $t \in [0, T]$ . Schreiben wir  $\ddot{c}(t) = -\kappa N_{c(t)}$ , so erhalten wir

$$\ddot{g}(t) > \frac{1 - r\kappa \langle N_c, \frac{c}{|c|} \rangle}{|c|} - \frac{\langle \dot{c}, c \rangle^2}{|c|^3}.$$

Da aber  $\kappa < \frac{1}{r}$  und da der zweite Term in Null gleich null ist, erhalten wir, wenn wir gegebenenfalls  $\delta$  verkleinern, dass

$$\ddot{g}(\xi) > k$$

für eine Konstante  $k$ , die nur von  $E(r, R)$  und  $\delta$  abhängt, wenn  $\epsilon$  klein genug ist. Wir erhalten erneut

$$g(t) > \frac{k}{2}t^2$$

und (5.5) ist bewiesen. Daraus folgt, dass  $\tilde{\psi}^{-1} = \tilde{\chi}^{-1} \circ \tilde{\phi}^{-1}$  die Umgebung  $C \cap N_1$  symplektomorph in den Zylinder abbildet, sodass der Abstand des Bildes des Randes zum Ball und zum Rand des Zylinders durch ein  $c|v|^2$  beschränkt ist. Da  $C$   $C^4$ -nahe am Ellipsoiden liegt, können wir  $\epsilon$  so klein wählen, dass wenn  $q \notin N$ ,  $q \in \partial C$ , dann  $q \in Z$ ,  $\text{dist}(q, \partial Z) > c\epsilon$  und  $\text{dist}(q, B_1) > c\epsilon$ . Im dritten Schritt erweitern wir  $\tilde{\psi}$  zu einem Symplektomorphismus  $\Psi$  auf  $\mathbb{C}^2$ .  $\Psi$  stimmt auf  $N$  mit  $\tilde{\psi}$  überein und  $\|\Psi - id\| < c\epsilon$ . Angenommen  $\Psi(q) \notin Z$ ,  $q \in \partial C$ . Dann gilt  $q \notin N$  und  $\text{dist}(q, \partial Z) > c\epsilon$  und somit  $\Psi(q) \in Z$ . Angenommen es existiert ein  $q \in \partial C$ , sodass  $\Psi(q) \in B_1$ . Dann  $q \notin N$ . Aber dann wissen wir  $\text{dist}(q, B_1) > c\epsilon$ . Somit ist der Satz bewiesen.  $\square$



# Literaturverzeichnis

- [CT97] J. Chen and G. Tian. Minimal surfaces in Riemannian 4-manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 7(5):873–916, 1997.
- [CW83] Shiing Shen Chern and Jon Gordon Wolfson. Minimal surfaces by moving frames. *Amer. J. Math.*, 105(1):59–83, 1983.
- [EH87] I. Ekeland and H. Hofer. Convex Hamiltonian energy surfaces and their periodic trajectories. *Comm. Math. Phys.*, 113(3):419–469, 1987.
- [Eke90] Ivar Ekeland. *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, volume 19 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Eli92] Yakov Eliashberg. Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(1-2):165–192, 1992.
- [Etn05] John B. Etnyre. Legendrian and transversal knots. In *Handbook of knot theory*, pages 105–185. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.
- [EWW02] Tobias Ekholm, Brian White, and Daniel Wienholtz. Embeddedness of minimal surfaces with total boundary curvature at most  $4\pi$ . *Ann. of Math. (2)*, 155(1):209–234, 2002.
- [Gei06] Hansjörg Geiges. Contact geometry. In *Handbook of differential geometry. Vol. II*, pages 315–382. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.
- [GW93] P. M. Gruber and J. M. Wills, editors. *Handbook of convex geometry. Vol. A, B*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.
- [Her00] David Hermann. Holomorphic curves and Hamiltonian systems in an open set with restricted contact-type boundary. *Duke Math. J.*, 103(2):335–374, 2000.
- [HWZ95a] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. A characterisation of the tight three-sphere. *Duke Math. J.*, 81(1):159–226 (1996), 1995. A celebration of John F. Nash, Jr.
- [HWZ95b] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudo-holomorphic curves in symplectisations. II. Embedding controls and algebraic invariants. *Geom. Funct. Anal.*, 5(2):270–328, 1995.

- [HWZ96] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Unknotted periodic orbits for Reeb flows on the three-sphere. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 7(2):219–244, 1996.
- [HWZ98] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. The dynamics on three-dimensional strictly convex energy surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 148(1):197–289, 1998.
- [HWZ99] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. A characterization of the tight 3-sphere. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(9):1139–1177, 1999.
- [HWZ03] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics. *Ann. of Math. (2)*, 157(1):125–255, 2003.
- [HZ90] H. Hofer and E. Zehnder. A new capacity for symplectic manifolds. In *Analysis, et cetera*, pages 405–427. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [Mil50] J. W. Milnor. On the total curvature of knots. *Ann. of Math. (2)*, 52:248–257, 1950.
- [RS93] Joel Robbin and Dietmar Salamon. The Maslov index for paths. *Topology*, 32(4):827–844, 1993.
- [Str88] Michael Struwe. *Plateau's problem and the calculus of variations*, volume 35 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.
- [Web84] S. M. Webster. Minimal surfaces in a Kähler surface. *J. Differential Geom.*, 20(2):463–470, 1984.
- [Web86] S. M. Webster. On the relation between Chern and Pontrjagin numbers. In *Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 49 of *Contemp. Math.*, pages 135–143. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [Wol89] Jon G. Wolfson. Minimal surfaces in Kähler surfaces and Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 29(2):281–294, 1989.