

LAGRANGE ZYLINDER UND MINIMALE ANNULI

Dissertation
zur Erlangung
des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Norman Hilbert
aus Haan

Bonn 2010

Angefertigt mit Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Ursula Hamenstädt
2. Gutachter: Prof. Dr. Werner Ballmann

Tag der Promotion:

Ich möchte mich bei Frau Prof. Dr. Hamenstädt für die hervorragende Betreuung über die gesamte Zeit der Promotion hinweg bedanken. Ohne die zahlreichen Gespräche und Hinweise wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Großer Dank gebührt auch meinen Eltern, die mich über die gesamte Zeit liebevoll unterstützt haben. Meine Freundin Sonja hat meine Höhen und Tiefen stets mitgetragen und war immer für mich da, auch wenn ich nur wenig Zeit für sie hatte. Schließlich danke ich Stefan Hainz, mit dem ich häufig hilfreiche Diskussionen führen konnte. Danke an alle, die mich auf diesem Weg unterstützt haben!

Zusammenfassung

Eine Lagrange Untermannigfaltigkeit L in einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist dadurch charakterisiert, dass $\omega|_L = 0$. Lagrange Mannigfaltigkeiten sind grundlegende Objekte der symplektischen Geometrie. Ein Versuch der Klassifizierung ist allerdings bereits im 4-dimensionalen äußerst schwierig.

Die sich aufdrängende Frage, wann zwei Lagrange Untermannigfaltigkeiten isotop sind, ist nur in wenigen Fällen zu beantworten. Dabei lassen sich nicht nur Isotopien in der differenzierbaren Kategorie untersuchen. Besonders interessant sind natürlich solche, die auch mit der symplektischen Struktur verträglich sind, also Isotopien durch Lagrange Untermannigfaltigkeiten.

Kotangentialbündel sind - nach den gerade-dimensionalen euklidischen Räumen - der am einfachsten zu konstruierende Typ symplektischer Mannigfaltigkeiten. Wir untersuchen daher das Problem Lagrange Isotopien in Kotangentialbündeln. Bisher wurde an vielen Stellen versucht, derartige Probleme mit der Hilfe von pseudoholomorphen Kurven zu lösen. Wir zeigen einen neuen Ansatz auf und wollen in diesem Zusammenhang Minimalflächen verwenden, die ähnliche Eigenschaften wie pseudoholomorphe Kurven haben, dabei allerdings flexibler und insbesondere leichter zu konstruieren sind.

Als Grundlage zeigen wir ein Theorem, nach dem wir eine spezielle Klasse von Lagrange Zylindern im Kotangentialbündel mit einer Lagrange Isotopie verbinden können, falls eine symplektische Füllung existiert. Damit meinen wir eine eingebettete Familie von symplektischen Annuli, deren Ränder auf zwei gegebenen Lagrange Untermannigfaltigkeiten liegen.

Diese Familie stellt eine Hyperfläche im Kotangentialbündel dar. Wir verwenden dann den charakteristischen Fluss dieser Hyperfläche, um eine geeignete Familie von Lagrangen Zylindern zu konstruieren.

Es stellt sich die Frage, wie man solche symplektischen Füllungen konstruieren kann. Anstelle von pseudoholomorphen Kurven, wollen wir wie bereits erwähnt Minimalflächen nutzen. Deren Existenz ist einerseits leichter zu kontrollieren, andererseits besitzen sie häufig sehr gutartige Eigenschaften im Zusammenhang mit symplektischen Strukturen.

Wir untersuchen daher das Verhalten minimaler Annuli in symplektischen Mannigfaltigkeiten und geben Kriterien dafür an, eingebettet und symplektisch zu sein.

Die vorliegende Arbeit möchte somit eine Grundlagen für eine Lösung des Lagrangen Isotopie-Problems mithilfe von Minimalflächen schaffen.

Wir zeigen, dass Lagrange Punkte nur über den Rand einer Familie von Minimalflächen entstehen können, niemals spontan im Inneren. Kann man also die Ränder hinreichend gut kontrollieren und sicherstellen, dass eine Umgebung des Randes symplektisch bleibt, so ist bereits die ganze Familie symplektisch.

Zur Konstruktion von Familien von Minimalflächen verwenden wir die Ergebnisse von Böhme und Tromba, um unter geeigneten Bedingungen an die Randkrümmung zu zeigen, wie sich immersierte Familien von Minimalflächen ohne Verzweigungspunkte konstruieren lassen.

Um die für uns notwendigen Eigenschaften der Familie von Minimalflächen sicherzustellen, benötigen wir sehr starke Einschränkungen an die Lagrangen Zylinder. Das betrifft insbesondere den Versuch, sicherzustellen, dass die Minimalflächen der Familie paarweise disjunkt sind. Diese Starrheit verhindert schließlich eine ausreichende Flexibilität bei der Wahl der Randdaten, um Eingebettetheit sicherzustellen, und das Einwandern Lagranger Randpunkte zu verhindern.

Diese Einschränkungen sind mehr technischer Natur und es sollten deutlich schwächere Ausgangsbedingungen an die Lagrangen Zylinder möglich sein.

Damit wäre zu einem späteren Zeitpunkt mehr Flexibilität vorhanden, um passende Minimalflächen auszuwählen, für die die Eingebettetheit bewiesen und Lagrange Randpunkte ausgeschlossen werden können.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Notation	1
1.1	Symplektische Geometrie	1
1.2	Lagrange Isotopien	5
1.3	Kotangentialbündel	11
1.4	Bekannte Ergebnisse	13
1.5	Eigene Ergebnisse	14
2	Entknoten mittels symplektischer Füllungen	19
2.1	Hyperflächen	20
2.2	Charakteristische Blätterungen	22
2.3	Entknoten Lagranger Zylinder	23
3	Minimalflächen	33
3.1	Definition und Grundlagen	35
3.2	Eingebettetheit von Minimalflächen	37
3.3	Komplexe Punkte	43
3.4	Lagrange Punkte	50
3.5	Anwendungen für Familien	54
3.6	Indextheorie für Minimalflächen	56
4	Füllungen mit minimalen Annuli	63
4.1	Minimale Füllungen	63
4.2	Existenz minimaler Füllungen	64

Kapitel 1

Grundlagen und Notation

Wir wollen zunächst einige Grundbegriffe aus der symplektischen Geometrie zusammenstellen. Zu Beginn erläutern wir kurz, was eine symplektische Mannigfaltigkeit ist und führen fast-komplexe Strukturen ein. Die für uns interessanten Lagrangischen Untermannigfaltigkeiten werden definiert und einige zentrale Eigenschaften erläutert. Schließlich wenden wir uns den Kotangentenbündeln zu, die uns als umgebende Räume durch die gesamte Arbeit begleiten werden. Dabei führen wir die wichtigsten Notationen und Begriffe ein. Eine darüber hinaus gehende Einführung in die symplektische Geometrie findet sich zum Beispiel in [MS98].

1.1 Symplektische Geometrie

Eine symplektische Mannigfaltigkeit X ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit zusammen mit einer geschlossenen, nicht-degenerierten 2-Form ω . Für eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) der Dimension $2n$ erfüllt ω also die beiden Bedingungen

$$d\omega = 0 \tag{1.1.1}$$

$$\omega^n \neq 0 \tag{1.1.2}$$

Symplektische Mannigfaltigkeiten sind offenbar immer von gerader Dimension, da sonst ω nicht nicht-degeneriert sein kann. Eine Untermannigfaltigkeit

$M \subset (X, \omega)$ heißt symplektisch, falls $\omega|_M$ nicht-degeneriert ist.

Falls im umgekehrten Extremfall $\omega|_M$ verschwindet, so heißt M isotrop und im Falle $\dim M = n$ Lagrange. Man beachte, dass n die maximale Dimension isotroper Untermannigfaltigkeiten darstellt.

Morphismen zwischen symplektischen Mannigfaltigkeiten sollen selbstverständlich die symplektische Struktur erhalten. Ein Diffeomorphismus

$$\phi : (X, \omega_X) \rightarrow (Y, \omega_Y) \quad (1.1.3)$$

heißt Symplektomorphismus, falls

$$\phi^* \omega_Y = \omega_X. \quad (1.1.4)$$

Entsprechend heißen zwei symplektische Mannigfaltigkeiten $(X, \omega_X), (Y, \omega_Y)$ symplektomorph, falls es einen Symplektomorphismus

$$\phi : (X, \omega_X) \rightarrow (Y, \omega_Y) \quad (1.1.5)$$

gibt.

Eine zentrale Eigenschaft symplektischer Mannigfaltigkeiten ist das Fehlen lokaler Invarianten. Im Gegensatz zur Riemannschen Geometrie, wo lokale Invarianten wie die Krümmung eine wichtige Rolle spielen, sind alle symplektischen Mannigfaltigkeiten lokal symplektomorph.

Lokales Modell ist dabei eine Umgebung im euklidischen Raum \mathbb{R}^{2n} mit der Standardform

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i. \quad (1.1.6)$$

Es gilt nämlich das Theorem von Darboux, welches zeigt, dass alle anderen symplektischen Mannigfaltigkeiten lokal symplektomorph zu $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ sind (s. [MS98]).

Theorem 1.1. *Sei (X, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in X$ eine Umgebung U , eine offene Menge V in \mathbb{R}^{2n} und einen Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$ so dass $\phi^* \omega_0 = \omega$.*

Für $n = 1$ ist das Modell einer symplektischen Mannigfaltigkeit also \mathbb{R}^2 mit $\omega_0 = dx \wedge dy$. Jede 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist gleichzeitig Lagrange.

Interessanter ist der Fall $n = 2$. Hier betrachten wir den 4-dimensionalen euklidischen Raum zusammen mit der symplektischen Struktur $\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$. Lagrange sind hier Flächen, d.h. 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten. Offenbar sind hier nicht mehr alle Flächen Lagrange Untermannigfaltigkeiten, wie das Beispiel des symplektischen Unterraumes, der durch die Vektoren $\partial x_1, \partial y_1$ aufgespannt wird, zeigt.

Es ist häufig sinnvoll, beim Studium symplektischer Mannigfaltigkeiten zusätzliche Strukturen einzuführen. Neben Riemannschen Metriken ist hierbei besonders das Zusammenspiel von symplektischen und fast-komplexen Strukturen hervorzuheben, welches sich in vielen Fällen als nützlich erweist.

Definition 1.2. Eine fast-komplexe Struktur J auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist ein Bündel-Isomorphismus

$$J : TX \rightarrow TX \quad (1.1.7)$$

so dass

$$J^2 = -id. \quad (1.1.8)$$

Sei X eine symplektische Mannigfaltigkeit mit symplektischer Form ω . Dann heißt eine fast-komplexe Struktur J zahm, falls in jedem Punkt $p \in X$

$$\omega(v, Jv) \geq 0 \quad (1.1.9)$$

für alle Tangentialvektoren $v \in T_p X$ gilt, mit Gleichheit genau dann, falls $v = 0$.

Eine zahme fast-komplexe Struktur heißt kompatibel, falls zusätzlich für alle $p \in X$ gilt:

$$\omega(v, w) = \omega(Jv, Jw) \text{ für } v, w \in T_p X \quad (1.1.10)$$

Dann ist

$$g_J(v, w) = \omega(v, Jw) \quad (1.1.11)$$

eine Riemannsche Metrik. Umgekehrt läßt sich die symplektische Struktur aus J und g_J zurückgewinnen. Es gilt:

$$\omega(v, w) = g_J(Jv, w) \quad (1.1.12)$$

Zu jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein Vielzahl kompatibler fast-komplexer Strukturen. Dabei ist der Raum aller kompatiblen fast-komplexen Strukturen zusammenziehbar ([MS98], Proposition 4.1).

Eine fast-komplexe Struktur J heißt integrabel, falls es komplexe Karten

$$\phi : U \rightarrow X, U \subset \mathbb{C}^n \quad (1.1.13)$$

gibt, so dass

$$d\phi \circ i = J \circ d\phi, \quad (1.1.14)$$

also $d\phi$ eine i - J -lineare Abbildung ist. Daraus folgt, dass X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit komplexer Dimension $\dim_{\mathbb{C}} = n$ ist.

Eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) mit einer integrablen, zu ω kompatiblen, fast-komplexen Struktur J heißt Kähler-Mannigfaltigkeit. Die Metrik g_J heißt dann Kähler-Metrik und ω wird auch Kähler-Form genannt. Anders gesagt ist eine Kähler-Mannigfaltigkeit eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n , zusammen mit einer Riemannschen Metrik g und einer nicht-degenerierten 2-Form auf der zugrunde liegenden $2n$ -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit, so dass:

$$\omega(v, w) = g(Jv, w) \quad (1.1.15)$$

wobei $J : T_p X \rightarrow T_p X$ die durch die komplexen Karten auf $T_p X$ induzierte Multiplikation mit i darstellt.

Zur Integrabilität von fast-komplexen Strukturen lässt sich festhalten: Eine fast-komplexe Struktur J auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist genau dann integrabel, wenn der *Nijenhuis*-Tensor

$$N_J(v, w) := [Jv, Jw] - J[Jv, w] - J[v, Jw] - [v, w] \quad (1.1.16)$$

auf allen Vektorfeldern $v, w : X \rightarrow TX$ verschwindet. Auf 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, d.h. Flächen, verschwindet der Nijenhuis-Tensor immer.

Daher ist eine fast-komplexe Struktur auf einer Riemannschen Fläche immer integrabel.

1.2 Lagrange Isotopien

In der klassischen Knotentheorie werden Einbettungen von $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ klassifiziert. Dabei werden zwei Einbettungen genau dann als äquivalent angesehen, falls sie sich durch eine Familie von Einbettungen ineinander überführen lassen, also isotop sind. Als Knoten oder "verknötet" bezeichnen wir eine Einbettung, die nicht zur Standard- $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ isotop ist.

Wir müssen noch definieren, was genau wir unter eine Isotopie verstehen wollen. Seien M, N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.3. Eine (C^k) -Isotopie von M in N ist eine (C^k) -glatte Abbildung:

$$F : M \times I \rightarrow N \quad (1.2.1)$$

so dass die Abbildungen

$$F_t : M \rightarrow N \quad (1.2.2)$$

$$x \mapsto F(x, t) \quad (1.2.3)$$

für jedes $t \in I$ Einbettungen sind. Die beiden Einbettungen F_0, F_1 heißen dann zueinander isotop.

Bemerkung 1.4. Um im Folgenden stets eine ausreichende Differenzierbarkeit gewährleisten zu können, setzen wir $k \gg 5$ voraus, wobei es sich hierbei nicht um eine scharfe Bedingung handelt. Wir fordern also, dass alle Abbildungen "glatt genug sind", umgehen aber die technischen Schwierigkeiten, die aus einer Verwendung von C^∞ -glatten Abbildung entstehen.

Sofern nicht explizit anders erwähnt, meinen wir entsprechend mit glatt immer C^k -glatt.

Ein Spezialfall sind Isotopien für die $M = N$. Solche Isotopien heißen auch Diffeotopien. Ist $U \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, und $\iota : U \rightarrow N$ die

Inklusion, so nennen wir Isotopien F_t mit $F_0 = \iota$ auch Isotopien von U und sagen, dass die Untermannigfaltigkeit $F_1(U)$ isotop zu U ist. Es stellt sich die Frage, wann solche Isotopien zu Diffeotopien fortgesetzt werden können. Für kompakte Untermannigfaltigkeiten $U \subset N$ und $\partial N = \emptyset$ liefert das folgende Theorem die Antwort (s. [Hir94], Thm 1.3):

Theorem 1.5. *Sei $U \subset N$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit und $F : U \times I \rightarrow N$ eine Isotopie von V . Dann gibt es eine Fortsetzung von F_t zu einer Diffeotopie $\tilde{F}_t : N \times I \rightarrow N$.*

In diesem Fall können Isotopien von kompakten Untermannigfaltigkeiten also stets fortgesetzt werden. Dennoch ist die Unterscheidung zwischen Diffeotopien und Isotopien von Bedeutung. Insbesondere wenn wir noch zusätzliche Bedingungen an die Isotopien stellen, ist keineswegs klar, ob sich diese - inklusive der zu erfüllenden Bedingungen - zu Diffeotopien fortsetzen.

In größeren Dimensionen, insbesondere im \mathbb{R}^4 , gibt es keine verknöteten Einbettungen der Form $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alle Einbettungen $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 3$ sind isotop.

Wir vergrößern daher die Dimension des Definitionsbereichs, betrachten also nunmehr Einbettungen von geschlossenen Flächen $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$. Sei dazu Σ eine vorgegebene geschlossene Riemannsche Fläche ohne Rand und $\phi_1, \phi_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$ zwei Einbettungen von Σ in \mathbb{R}^4 .

Wie im Fall von Knoten in \mathbb{R}^3 können wir fragen, ob zwei derartige Flächen isotop sind. Offenbar ist das nicht automatisch der Fall, wie man am Beispiel eines um eine Achse rotierten Knotens sieht. Sei $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ eine Einbettung von S^1 im oberen Halbraum

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\} \quad (1.2.4)$$

und betrachte die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}_+^3 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (1.2.5)$$

$$((x_1, x_2, x_3), \theta) \mapsto (x_1, x_2, x_3 \sin(\theta), -x_3 \cos(\theta)) \quad (1.2.6)$$

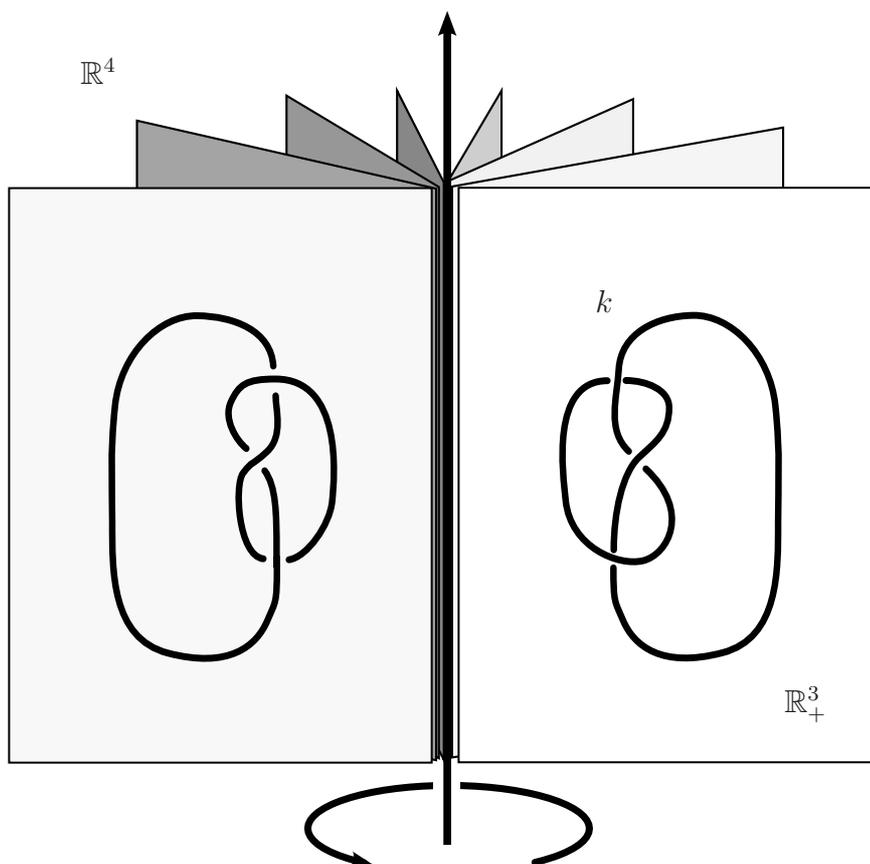


Abbildung 1.1: Konstruktion einer verknöteten Fläche durch Rotation eines Knotens in \mathbb{R}^3

Dann ist

$$\Sigma = S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (1.2.7)$$

$$(s, \theta) \mapsto \Psi(k(s), \theta) \quad (1.2.8)$$

ein eingebetteter Torus in \mathbb{R}^4 (s. Abbildung 1.2). Dieser ist genau dann isotop zum Standard-Torus $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$, wenn die Einbettung k isotop zum Unknoten ist. Es macht also Sinn, von “verknöteten” Flächen bzw. Untermannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^4 zu sprechen.

Für beliebige 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten gibt es zusätzlich topo-

logische Hindernisse, damit zwei Einbettungen einer geschlossenen Riemannschen Fläche Σ isotop zueinander sein können. Nehmen wir an,

$$\phi_0, \phi_1 : \Sigma \rightarrow X \tag{1.2.9}$$

sind Einbettungen von Σ in eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann repräsentieren die Bilder $\Sigma_0 = \phi_0(\Sigma)$ und $\Sigma_1 = \phi_1(\Sigma)$ Homologieklassen $A = [\Sigma_0], B = [\Sigma_1] \in H_2(M)$. Falls ϕ_0, ϕ_1 und damit Σ_0, Σ_1 isotop sind, muss jedenfalls $A = B$ gelten.

Uns interessieren an dieser Stelle allerdings nur differentialgeometrische Obstruktionen, d.h. wir werden stets voraussetzen, dass die zu untersuchenden Flächen homolog und diffeomorph sind.

In unserem Fall sind die Objekte, die wir klassifizieren möchten, Lagrange Untermannigfaltigkeiten in symplektischen Mannigfaltigkeiten. Im Grunde ist die Situation eine ganz ähnliche wie zuvor. Wir betrachten nun Isotopie-Klassen von Lagrangen Untermannigfaltigkeiten. Die einfachste Frage diesbezüglich ist: Gibt es verknotete Lagrange Untermannigfaltigkeiten? Oder sind vielleicht alle Lagrangen Untermannigfaltigkeiten isotop zueinander?

Zunächst müssen wir erklären, was genau "isotop" für eine Lagrange Untermannigfaltigkeit bedeuten soll. Aufgrund der zusätzlichen (symplektischen) Struktur auf dem umgebenden Raum lassen sich drei Typen von Isotopien unterscheiden:

- (i) Isotopien in der differenzierbaren Kategorie
- (ii) Lagrange Isotopien
- (iii) Hamiltonsche Isotopien

In der differenzierbaren Kategorie gilt: Zwei Lagrange Untermannigfaltigkeiten L_0, L_1 heißen (*differenzierbar*) *isotop*, falls es eine Familie L_t von differenzierbaren Einbettungen gibt, die die beiden verbindet.

Zusätzlich können wir nun auch die symplektische Struktur in Betracht ziehen und verlangen, dass die Eigenschaft, Lagrange zu sein, während der

Isotopie erhalten bleibt. Entsprechend heißen L_0, L_1 *Lagrange isotop*, falls sich die Familie L_t durch Lagrange Einbettungen realisieren lässt.

Hamiltonsch isotop zu sein ist eine noch stärkere Forderung: Sind zwei Lagrange Untermannigfaltigkeiten *Hamiltonsch isotop*, so gibt es eine Isotopie ϕ_t , so dass

$$v_t := \frac{d}{dt}\phi_t \quad (1.2.10)$$

ein Hamiltonsches Vektorfeld ist, d.h. die 1-Form

$$v_t \lrcorner \omega = \omega(v_t, \cdot) \quad (1.2.11)$$

ist exakt. Mit anderen Worten gibt es eine (zeitabhängige) Funktion

$$H_t : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.2.12)$$

deren Hamiltonscher Fluss eine Isotopie zwischen L_0, L_1 darstellt.

Offenbar gilt:

$$\text{Hamiltonsch isotop} \quad (1.2.13)$$

$$\Rightarrow \text{Lagrange isotop} \quad (1.2.14)$$

$$\Rightarrow \text{differenzierbar isotop} \quad (1.2.15)$$

Die folgende Fragestellung ist auch als ‘‘Lagranges Isotopie Problem’’ bekannt: Seien L_0, L_1 gegebene Lagrange Untermannigfaltigkeiten in einer symplektischen Mannigfaltigkeit X der reellen Dimension 4. Wann sind die Flächen L_0, L_1 isotop (in einer der drei obigen Weisen) zueinander?

Für beliebige X ist eine allgemeine Antwort auf das Lagrange Isotopie Problem unbekannt und schon für \mathbb{R}^4 ist die Frage nicht vollständig beantwortet. Beschränken wir uns noch weiter, so bietet sich als symplektische Mannigfaltigkeit das Kotangentenbündel einer Riemannschen Fläche Σ an.

Dieses ist in kanonischer Weise eine symplektische Mannigfaltigkeit. Sind nämlich (p_1, p_2) Koordinaten auf Σ und (p_1, p_2, q_1, q_2) die induzierten Koordinaten auf $T^*\Sigma$, so haben wir zunächst die kanonische 1-Form auf $T^*\Sigma$

$$\lambda := \sum_{i=1}^2 q_i dp_i \quad (1.2.16)$$

Offenbar ist $\omega = -d\lambda$ eine nicht-degenerierte, geschlossene 2-Form und damit symplektisch. Da λ nicht von der Wahl der Koordinaten (p_i) auf Σ abhängt, ist auch ω unabhängig von den Koordinaten auf Σ definiert.

Die Betrachtung von Lagrangen Untermannigfaltigkeiten in Kotangentialbündeln entspricht bei genauerem Hinsehen einer lokalen Sichtweise. Sei L nämlich eine kompakte Lagrange Untermannigfaltigkeit in einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit X . Dann ist nach dem Lagrangen Umgebungssatz eine Umgebung von L symplektomorph zu einer Umgebung des Nullschnitts im Kotangentialbündel von L . Für eine Lagrange Untermannigfaltigkeiten $L \subset X$ können wir C^0 -nahe Lagrange Untermannigfaltigkeiten also als Untermannigfaltigkeiten von T^*L auffassen - unabhängig von X . Diese Tatsache ist Inhalt des wohlbekannten Lagrangen-Umgebungssatzes von Weinstein [Wei71] (s. beispielsweise [MS98]):

Theorem 1.6. *Sei (X, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $L \subset X$ eine kompakte Lagrange Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine Umgebung $N(L_0) \subset T^*L$ des Nullschnitts L_0 , eine Umgebung $V \subset X$ von L und ein Diffeomorphismus $\phi : N(L_0) \rightarrow V$ so dass*

$$\phi^*\omega = -d\lambda, \quad \phi|_L = id \tag{1.2.17}$$

wobei λ die kanonische 1-Form auf T^*L bezeichnet.

Aus diesem Grund scheint es naheliegend zu sein, das Lagrange Isotopie-Problem zunächst auf Kotangentialbündeln zu lösen und nicht - wie man vielleicht vermuten könnte, im euklidischen \mathbb{R}^4 .

Betrachten wir eine Riemannschen Fläche Σ und eine Lagrange Einbettung $\Sigma \rightarrow (T^*\Sigma, -d\lambda)$. Wir setzen voraus, dass diese homolog (und damit homotop) zum Nullschnitt ist. Entsprechend der obigen Typen von Isotopien ergeben sich dann drei Fragestellungen: Ist die Lagrange Untermannigfaltigkeit differenzierbar, Lagrange oder sogar Hamiltonsch isotop?

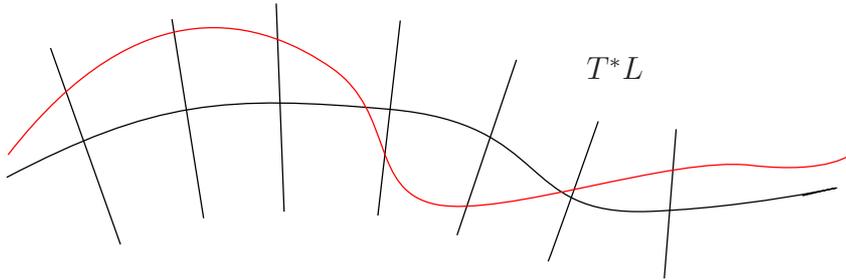


Abbildung 1.2: Schematisches Bild eines Bündels

1.3 Kotangentialbündel

Wir werden das Lagrange Isotopie-Problem für Kotangentialbündel über Flächen untersuchen. Genauer gesagt schränken wir uns auf eine ganz spezielle Fläche, nämlich den Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ ein. Er soll den Grundbaustein für den allgemeinen Fall von beliebigen Riemannschen Flächen darstellen.

Sind

$$(\theta, t), 0 \leq \theta < 2\pi, t \in \mathbb{R} \quad (1.3.1)$$

Koordinaten auf $S^1 \times \mathbb{R}$, so induzieren diese auch Koordinaten auf dem Kotangentialbündel

$$X := T^*(S^1 \times \mathbb{R}). \quad (1.3.2)$$

Über einem Punkt (θ, t) ist nämlich $T_{(\theta, t)}^*(S^1 \times \mathbb{R})$ aufgespannt durch $d\theta, dt$. Das liefert eine Trivialisierung

$$X \xrightarrow{\cong} S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \cong S^1 \times \mathbb{R}^3 \quad (1.3.3)$$

mit Koordinaten (θ, t, x, y) .

Auf X existiert eine kanonische symplektische Form ω_0 , gegeben durch

$$\omega_0 = d\theta \wedge dx + dt \wedge dy \quad (1.3.4)$$

Sei $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Immersion und bezeichne

$$L := \phi(S^1 \times \mathbb{R}) \quad (1.3.5)$$

das Bild von ϕ . Dann heißt L Lagrange, falls überall $\phi^*\omega_0 = 0$ gilt. Einfachstes Beispiel für eine Lagrange Untermannigfaltigkeit ist der Nullschnitt:

$$\phi_0 : (\theta, t) \mapsto (\theta, t, 0, 0) \quad (1.3.6)$$

Dann ist $\phi_0^*\omega_0 = 0$ nach Definition von ω_0 . Allgemein ist ein Schnitt

$$\phi : (\theta, t) \mapsto (\theta, t, x(\theta, t), y(\theta, t)) \quad (1.3.7)$$

genau dann Lagrange, falls die zu dem Schnitt ϕ gehörige 1-Form

$$\alpha_\phi = x d\theta + y dt \quad (1.3.8)$$

geschlossen ist. Ist α_ϕ sogar exakt, so heißt auch ϕ (bzw. die durch ϕ gegebene Lagrange Untermannigfaltigkeit L_ϕ) exakt.

Im Fall von Kotangentialbündeln ist ω_0 nicht nur geschlossen, sondern sogar exakt, d.h. $\omega_0 = -d\lambda_0$ für

$$\lambda_0 = x d\theta + y dt. \quad (1.3.9)$$

Die 1-Form λ_0 heißt auch Liouville-Form auf X . Der Pullback von λ_0 unter einem Schnitt ϕ mit einem Schnitt entspricht der zugehörigen 1-Form α_ϕ . Das Bild einer Abbildung ϕ ist also genau dann Lagrange, falls $\phi^*\lambda_0$ geschlossen ist.

Des weiteren wird die Existenz einer Riemannschen Metrik in vielen Fällen eine Hilfe sein. Insbesondere werden wir einigen Gebrauch von Minimalflächen machen, für die die Wahl einer geeigneten Metrik natürlich essentiell ist.

Im Fall des Zylinders bietet sich die Wahl einer kanonischen glatten Metrik an, die zudem flach ist, nämlich die Standard-Produktmetrik auf $S^1 \times \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Koordinaten auf X können wir diese leicht auf X fortsetzen und erhalten eine flache Metrik g auf ganz X .

In Koordinaten (θ, t, x, y) auf X ist dann $(g_{ij}) = id$.

Ebenso besitzt X eine passende komplexe Struktur J :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.10)$$

Damit wird X zu einer Kähler-Mannigfaltigkeit mit komplexen Karten

$$(\theta, t, x, y) \mapsto (\theta + ix, t + iy) \in \mathbb{C}^2 \quad (1.3.11)$$

Die Metrik auf $S^1 \times \mathbb{R}$ ist flach, ebenso die induzierte Metrik auf X . Auf diese Weise wird $X = T^*(S^1 \times \mathbb{R})$ zu einer flachen Kähler-Mannigfaltigkeit.

1.4 Bekannte Ergebnisse

Zunächst konnten Eliashberg und Polterovich 1996 in [EP96] ein lokales Ergebnis formulieren:

Theorem 1.7. *Jede Lagrange Einbettung von \mathbb{R}^2 in (\mathbb{R}^4, ω_0) , die im Unendlichen flach ist, ist isotop zur flachen Einbettung. Die Isotopie kann durch eine Hamiltonsche Isotopie mit kompaktem Träger realisiert werden.*

1993 zeigten dieselben Autoren in [EP93], dass im Kotangentenbündel von S^2 oder T^2 jede Lagrange Fläche, die homolog zum Nullschnitt ist, (in der differenzierbaren Kategorie) isotop zum Nullschnitt ist:

Theorem 1.8 (Thm 1.1.A in [EP93]). *Sei Σ die Sphäre S^2 oder der Torus T^2 . Dann ist jede Lagrange Fläche $L \subset T^*\Sigma$, die homolog zum Nullschnitt ist auch isotop zum Nullschnitt*

Dabei ist bemerkenswert, dass nicht vorausgesetzt wird, dass L diffeomorph zu Σ (und damit dem Nullschnitt) ist. Vielmehr reicht, dass L dieselbe Homologiekategorie repräsentiert wie der Nullschnitt.

Eine gute Übersicht über einige zentrale Ergebnisse zu Lagrange Isotopien findet sich in der Arbeit [EP97].

Natürlich steht zu vermuten, dass dieses Ergebnis auch über anderen Riemannschen Flächen gilt. Außerdem würde man isotop gern durch das stärkere Lagrange isotop ersetzen.

Vermutung 1.9. *Sei L eine Riemannsche Fläche und $L \rightarrow T^*L$ eine zusammenhängende Lagrange Untermannigfaltigkeit, die homolog zum Nullschnitt in T^*L ist. Dann ist L (Lagrange) isotop zum Nullschnitt.*

In der differenzierbaren Kategorie wurde ein entsprechendes Resultat von Hind und Ivrii gezeigt.

Theorem 1.10 ([HI06], Thm 1.1). *Sei T^*L das Kotangentenbündel einer Riemannschen Fläche mit ihrer kanonischen symplektischen Struktur und $L_1 \subset T^*L$ sei eine zusammenhängende Lagrange Untermannigfaltigkeit, die homolog zum Nullschnitt L_0 in T^*L ist. Dann ist L_1 differenzierbar isotop zu L_0 .*

Ebenso wie in der Argumentation von Eliashberg und Polterovich werden die Lagrange Untermannigfaltigkeiten dabei aber nach der Einführung passender neuer Strukturen zu symplektischen Untermannigfaltigkeiten. Für diese wird dann ein analoges “symplektisches Isotopie-Problem” gelöst. Auf diese Weise lassen sich folglich nur differenzierbare, nicht aber Lagrange Isotopien erzeugen.

Der Beweis von Theorem 1.7 wird anders angegangen: Existiert eine geeignete (“einfache”) Hyperfläche, die die Lagrange und die flache Ebene enthält, so kann man mit Hilfe der charakteristischen Blätterung eine Lagrange Isotopie konstruieren. Diesen Weg wollen wir auch in unseren Untersuchungen verfolgen. Während in den zugehörigen Beweisen jedoch Gebrauch von pseudoholomorphen Kurven gemacht wird, werden wir Minimalflächen verwenden, um geeignete Hyperflächen zu konstruieren.

1.5 Eigene Ergebnisse

Von obigen Ergebnissen ausgehend wollen wir eine Lagrange Isotopie konstruieren. Wir konzentrieren uns dabei auf einen Spezialfall: Als Riemannsche

Mannigfaltigkeit wählen wir den Zylinder und setzen voraus, dass L außerhalb einer kompakten Menge mit einem konstanten Schnitt in $T^*(S^1 \times \mathbb{R})$ übereinstimmt.

Wir betrachten die folgende Situation: $L \cong S^1 \times \mathbb{R}$ sei ein C^k -glatter Lagranger Zylinder in $X = S^1 \times \mathbb{R}^3$, wobei L auf $\{|t| > C\}$ für ein $r > 0$ mit dem Standard-Zylinder

$$Z_r = \{(\theta, t, r, 0) \in X \mid (\theta, t) \in S^1 \times \mathbb{R}\} \quad (1.5.1)$$

übereinstimmen soll. Dann bezeichnen wir mit F_t die "Fasern"

$$F_t = \{(\theta, \tau, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^3 \mid \tau = t\} \quad (1.5.2)$$

und mit Γ_t den Schnitt von L mit F_t :

$$\Gamma_t := L \cap F_t. \quad (1.5.3)$$

Sei $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow X$ eine C^k -glatte Parametrisierung von L . Mit γ_t bezeichnen wir die Kurven

$$\gamma_t = \{(\theta, \tau, 0, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}^3; \tau = t\} \quad (1.5.4)$$

auf dem Nullschnitt

$$L_0 = \{(\theta, \tau, 0, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}^3\} \quad (1.5.5)$$

d.h. die Schnitte $L_0 \cap F_t$.

Wir setzen von hier an voraus, dass L die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Γ_t ist für alle $t \in \mathbb{R}$ eine einfach geschlossene Kurve in F_t mit

$$\text{tc}(\Gamma_t) \leq 2\pi \quad (1.5.6)$$

(ii) $\phi(\theta, t) = (\theta, t, r, 0)$ für $|t| > C$, $r > 0$ und eine Parametrisierung ϕ von L .

(iii) $L \cap L_0 = \emptyset$

wobei wir mit $tc(\Gamma_t)$ die totale Krümmung von Γ_t bezeichnen: Ist $c : S^1 \rightarrow \Gamma_t$ eine Bogenlängen-Parametrisierung von Γ_t , so sei

$$tc(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} |c''(s)| ds \quad (1.5.7)$$

Im Kapitel 2 erläutern wir zunächst, wie sich eine Lagrange Untermannigfaltigkeit mit Hilfe einer geeigneten Hyperfläche entknoten lässt. Der Beweis nutzt die charakteristische Blätterung der Hyperfläche und beruht auf Ideen von [EP96].

Theorem A (Theorem 25). *Sei L eine Lagrange Untermannigfaltigkeit, die für $|t| > C$ mit einem der Standard-Zylinder $Z_r, r > 0$ übereinstimmt.*

Falls es eine C^k -glatte symplektische Füllung zwischen L und L_0 gibt, die für $|t| > C$ mit der Standard-Füllung

$$A_t^r = \{(\theta, t, \rho, 0) \in X \mid \theta \in S^1, 0 \leq \rho \leq r\} \quad (1.5.8)$$

von Z_r übereinstimmt, so ist L Lagrange unverknotet. Genauer gesagt gibt es eine C^{k-1} -glatte Familie L_ρ Lagrange Untermannigfaltigkeiten, die auf $\{|t| > C\}$ mit den Standard-Zylindern Z_ρ übereinstimmt und L mit L_0 verbindet.

Dabei verstehen wir unter einer symplektischen Füllung zwischen L und L_0 eine Familie eingebetteter, disjunkter, symplektischer Annuli A_t mit Rand auf L, L_0 , so dass $\partial \bigcup A_t = L \cup L_0$. Die Vereinigung der Annuli ist dann eine Hyperfläche deren Rand aus der Lagrange und dem Nullschnitt besteht und die durch die symplektischen Annuli geblättert ist.

Es stellt sich die Frage, wie sich solche Hyperflächen auf kontrollierte Weise konstruieren lassen. Dazu wollen wir Minimalflächen verwenden. Über diese sind zahlreiche Ergebnisse bekannt, auch über ihre speziellen Eigenschaften in Kähler-Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten daher in Kapitel 3 die wichtigsten Eigenschaften von Minimalflächen in Kähler-Mannigfaltigkeiten.

Zunächst sind Stabilität und Eingebettetheit als rein differentialgeometrische Eigenschaften von Bedeutung. Im unserem Zusammenhang ist darüber

hinaus das Zusammenspiel mit auf der umgebenden Mannigfaltigkeit gegebenen komplexen und symplektischen Strukturen von Bedeutung. Wir untersuchen daher schließlich das Auftreten komplexer und Lagranger Punkte auf Minimalflächen mit Rand.

Das bekannte Ergebnis, dass die Anzahl von komplexen Punkten einer Minimalfläche eine topologische Invariante ist, übertragen wir auf Flächen mit Rand. Es zeigt sich, dass solche Punkte ausschließlich über den Rand entstehen können. Ähnliches gilt für Lagrange Punkte. Genauer zeigen wir:

Proposition 1.11 (Proposition 3.20). *Sei M_t eine C^k -glatte Familie von Minimalflächen mit Rand in einer symplektischen 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Falls M_0 symplektisch ist und für kein t am Rand von M_t Lagrange Punkte auftreten, so sind alle M_t symplektisch.*

Um eine geeignete Hyperfläche zum Entknoten zu konstruieren, verwenden wir in Kapitel 4 Familien von Minimalflächen. Wie zuvor setzen wir voraus, dass $L \cong S^1 \times \mathbb{R}$ ein eingebetteter, C^k -glatter Lagranger Zylinder in $X = S^1 \times \mathbb{R}^3$ ist, der folgenden Bedingungen genügt:

(i) Γ_t ist für alle $t \in \mathbb{R}$ eine einfach geschlossene Kurve in F_t mit

$$\text{tc}(\Gamma_t) \leq 2\pi \quad (1.5.9)$$

(ii) $\phi(\theta, t) = (\theta, t, r, 0)$ für $|t| > C$, $r > 0$ und eine Parametrisierung $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow L$ von L .

(iii) $L \cap L_0 = \emptyset$

Konkret zeigen wir:

Theorem B (S. 65). *Sei $L \subset X$ ein Lagranger Zylinder, der obige Bedingungen erfüllt. Falls für jedes t eine nichtkonstante, subharmonische Funktion*

$$u_t : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.5.10)$$

existiert, so dass

$$u_t|_{\Gamma_t} = u_t|_{L_0} = \text{const}, \quad (1.5.11)$$

so gibt es eine Füllung mit minimalen Annuli zwischen L und dem Nullschnitt L_0 .

Auf diesem Weg können wir für geeignete Lagrange Flächen eine Füllung konstruieren, wobei noch offen ist, unter welchen Bedingungen diese Füllung eine symplektische Füllung ist. Wir werden abschließend einige Bedingungen untersuchen, die geeignet sein könnten, sicherzustellen, dass die Füllung symplektisch ist. Hierbei genügt es aufgrund von Proposition 3.20, die Ränder der Minimalflächen zu kontrollieren und zu verhindern, dass am Rand Lagrange Punkte entstehen.

Könnte man sicherstellen, dass eine solche Füllung auch symplektisch ist, könnte man die gesuchte Lagrange Isotopie mit Hilfe von Theorem 2.3 konstruieren.

Kapitel 2

Entknoten mittels symplektischer Füllungen

Um einen Weg zu finden, eine gegebene Lagrange Untermannigfaltigkeit durch eine Familie Lagrange Untermannigfaltigkeiten auf den Nullschnitt zu isotopieren, ist es notwendig, zusätzliche Strukturen zu konstruieren. Wir betrachten zunächst eine (geschlossene) Riemannsche Fläche L . Sei L_1 eine zu L diffeomorphe und homologe Untermannigfaltigkeit in T^*L . Im Spezialfall, dass L_1 ein Schnitt in T^*L ist, d.h. Bild einer geschlossenen 1-Form, so ist L trivialerweise Lagrange isotop zum Nullschnitt L_0 .

In diesem Fall nennen L_1 auch *Lagrange unverknotet*. Im allgemeinen nennen wir eine Lagrange Untermannigfaltigkeit in der Homologiekategorie von L_0 Lagrange unverknotet, falls sie Lagrange isotop zum Nullschnitt ist.

Hätten wir also ein Symplektomorphismus

$$\Psi : T^*L \rightarrow T^*L \tag{2.0.1}$$

so dass $\Psi(L_1)$ ein Schnitt in T^*L wäre, so wäre L_1 Lagrange unverknotet. Den Symplektomorphismus können wir als Koordinatenwechsel auffassen. In diesem Sinne wäre es also wünschenswert geeignete Koordinaten zu konstruieren, in denen L_1 wie ein Schnitt aussieht.

Ad hoc scheint es unmöglich, solche Koordinaten zu konstruieren. Die Überlegung führt aber zu folgender Idee: Gelingt es eine geeignete Zusatz-

struktur einzuführen - vergleichbar mit einer Art von Koordinaten - ist es möglich, L_1 zu entknoten, d.h. Lagrange in den Nullschnitt zu isotopieren.

Wir wollen zunächst geeignete Bedingungen angeben, unter denen wir zeigen können, dass eine gegebene Lagrange Untermannigfaltigkeit Lagrange unverknotet ist.

In [EP96] konnten Eliashberg und Polterovich zeigen, dass Lagrange Untermannigfaltigkeiten lokal unverknotet sind. Sie untersuchen dazu Lagrange Einbettungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, die im Unendlichen flach sind und zeigen, dass diese Lagrange isotop zur Standard-Einbettung von \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^4 sind. Der Beweis beruht im Wesentlichen auf der Möglichkeit, eine geeignete Hyperfläche W zu konstruieren, die von L und der flachen Ebene berandet wird. Falls eine solche Hyperfläche existiert, so können wir deren charakteristische Blätterung nutzen, um Isotopien von L zu konstruieren.

Wir wollen diese Idee nutzen, um Lagrange Untermannigfaltigkeiten in $S^1 \times \mathbb{R}^3$, dem Kotangentenbündel des Zylinders zu entknoten. Wir betrachten also

$$X = T^*(S^1 \times \mathbb{R}) \cong S^1 \times \mathbb{R}^3 \quad (2.0.2)$$

mit Koordinaten (θ, t, x, y) und symplektischer Form

$$\omega_0 = d\theta \wedge dx + dt \wedge dy. \quad (2.0.3)$$

Sei $L \subset X$ ein Lagrange Zylinder, d.h. eine Einbettung $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow X$. Mit L_0 bezeichnen wir den Nullschnitt:

$$L_0 = \{x = 0, y = 0\} \subset X. \quad (2.0.4)$$

2.1 Hyperflächen

Wir führen zunächst den Begriff einer symplektischen Füllung zwischen zwei Lagrange Zylindern ein. Mit $X = T^*(S^1 \times \mathbb{R})$ bezeichnen wir wie zuvor das Kotangentenbündel des Zylinders und betrachten eine Lagrange Untermannigfaltigkeit $L \subset X$ mit

$$L \cong S^1 \times \mathbb{R}. \quad (2.1.1)$$

Sind (θ, t, x, y) Koordinaten auf $X \cong S^1 \times \mathbb{R}^3$, so setzen wir voraus, dass L für $|t| > C$ mit dem Standard-Zylinder

$$Z_r = \{(\theta, t, r, 0) \in X \mid (\theta, t) \in S^1 \times \mathbb{R}\} \quad (2.1.2)$$

übereinstimmt, wobei (θ, t, x, y) Koordinaten auf X sind.

Mit anderen Worten:

$$L \cap \{|t| > C\} = Z_r \cap \{|t| > C\} \quad (2.1.3)$$

Mit einer symplektischen Füllung zwischen L und L_0 meinen wir eine C^k -Einbettung einer Dreimannigfaltigkeit in X mit Rand in X , die von L, L_0 berandet wird und symplektische Blätter hat:

Definition 2.1. Seien $L_i, i = 1, 2$ zwei C^k -glatt eingebettete Lagrange Zylinder in X .

Eine C^k -glatte Abbildung

$$f : S^1 \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow X \quad (2.1.4)$$

heißt *symplektische Füllung* zwischen L_1 und L_2 , falls für die Annuli

$$A_t = f(S^1 \times [0, 1] \times \{t\}) \quad (2.1.5)$$

gilt:

- (i) jeder Annulus A_t ist eingebettet und symplektisch.
- (ii) die Annuli A_t sind paarweise disjunkt.
- (iii) $f(S^1 \times \{0\} \times \mathbb{R}) = L_1$
- (iv) $f(S^1 \times \{1\} \times \mathbb{R}) = L_2$

In Kapitel 4 werden wir untersuchen, unter welchen Umständen sich derartige Füllungen konstruieren lassen. Zunächst stellen wir die Frage, wie solche symplektischen Füllungen dabei helfen, Lagrange Isotopien zu erzeugen.

Die symplektische Struktur erzeugt auf jeder Hyperfläche ein Linienfeld, die sogenannten charakteristischen Linien auf der durch die Füllung gegebene Hyperfläche. Diese sind stets transversal zu den symplektischen Blättern. Außerdem ist eine eingebettete Fläche in der Hyperfläche dann und nur dann Lagrange, wenn sie überall tangential an die charakteristischen Linien ist. Diese Tatsache wird uns in die Lage versetzen, eine geeignete Familie Lagranger Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

2.2 Charakteristische Blätterungen

Wie jede Hyperfläche in einer symplektischen Mannigfaltigkeit besitzt auch die symplektische Füllung A_t eine charakteristische Blätterung, die für uns von großer Bedeutung sein wird.

Wir bezeichnen mit $H = \bigcup A_t$ die durch die symplektische Füllung A_t definierte Hyperfläche. Sei $p \in H$ ein Punkt aus H . Der Tangentialraum $T_p H$ an H in p ist ein 3-dimensionaler Unterraum von $T_p X$. Wir betrachten die Einschränkung $\omega|_{T_p H}$. Sei W das Linienfeld

$$W := \{w \in T_p H \mid \omega(v, w) = 0 \text{ für alle } v \in T_p H\} \quad (2.2.1)$$

der Kern von $\omega|_{T_p H}$. Da ω eine nicht-degenerierte 2-Form ist, ist $\dim W = 1$.

In Bezug auf die komplexe Struktur J auf X handelt es sich um das orthogonale Komplement der eindeutigen J -invarianten Hyperebene in $T_p H$. Dabei ist die Riemannsche Metrik die von J induzierte Metrik

$$g := g_J = \omega \circ (id \otimes J). \quad (2.2.2)$$

Ist nämlich $v \in T_p H$, so dass $Jv \in T_p H$, so gilt für jedes $w \in T_p H$, welches senkrecht auf v, Jv steht:

$$\omega(v, w) = -g(Jv, w) = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\omega(Jv, w) = g(v, w) = 0 \quad (2.2.4)$$

Daraus folgt sofort, dass $w \in \ker \omega|_{T_p H}$.

Die durch das Linienfeld W auf H induzierte Blätterung heißt *charakteristische Blätterung* von H .

Lemma 2.2. *Sei $L \subset H$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit in H . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) L ist Lagrange

(ii) $\ker \omega|_{T_p H} \subset T_p L$ für alle $p \in L$

Beweis. Sei $L \subset H$ eine Lagrange Untermannigfaltigkeit. Sei $p \in L$ ein beliebiger Punkt in L . Es gibt eine Basis $\xi_i \in T_p L$, $i = 1, 2$ von $T_p L$ als $\xi_i = w + v_i$ mit $w \in \ker \omega|_{T_p H}$ und v_i aus der eindeutigen komplexen Ebene in $T_p H$. Da L Lagrange ist, gilt

$$0 = \omega(\xi_1, \xi_2) \quad (2.2.5)$$

$$= \omega(v_1, v_2) \quad (2.2.6)$$

$$= g(v_1, Jv_2) \quad (2.2.7)$$

Entweder ist also ein $v_i = 0$ und es folgt $w \in T_p L$. Im anderen Fall ist Jv_2 senkrecht auf v_1 , also $Jv_2 = aJv_1$ $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ und somit $\mathbb{R}v_1 = \mathbb{R}v_2$, d.h. v_1, v_2 sind linear abhängig. Daraus folgt wiederum, dass $w \in T_p L$. In beiden Fällen gilt somit

$$\ker \omega|_{T_p H} \subset T_p L \quad (2.2.8)$$

wie behauptet.

Sei nun umgekehrt L eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von H , die überall tangential an die charakteristische Blätterung ist. Dann gibt es für jedes $p \in L$ ein $v \in T_p L$ mit $v \in \ker \omega|_{T_p H}$. Also ist $\omega(w, v) = 0$ für alle $w \in T_p L$ und L ist somit Lagrange. \square

2.3 Entknoten Lagranger Zylinder

Wie zuvor betrachten wir das Kotangentialbündel $X = T^*(S^1 \times \mathbb{R})$ des Zylinders $S^1 \times \mathbb{R}$. In Koordinaten (θ, t, x, y) schreiben wir die symplektische

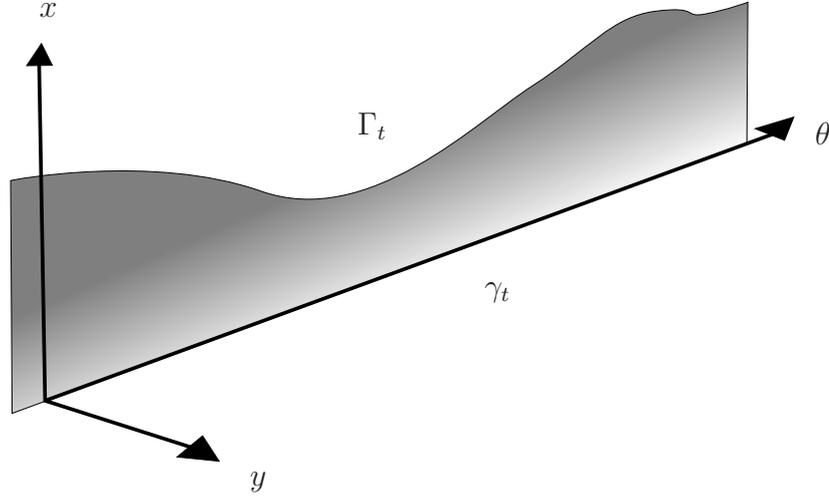


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung eines minimalen Annulus zwischen dem Nullschnitt L_0 und der Lagrange L .

Form $\omega = d\theta \wedge dx + dt \wedge dy$. Sei L_0 der Nullschnitt in X und $H_0 \subset X$ die Hyperfläche

$$H_0 = \{(\theta, t, x, y) \in T^*(S^1 \times \mathbb{R}) \mid y = 0\} \quad (2.3.1)$$

Weiter bezeichnen wir für $\rho \in \mathbb{R}$ mit ψ_ρ die Abbildung

$$\psi_\rho(\theta, t, x, y) = (\theta, t, x + \rho, y) \quad (2.3.2)$$

Die Abbildung ψ_ρ ist also nichts weiter als die einfache Translation um ρ in Richtung der x -Koordinate. Für die spätere Konstruktion bezeichnen wir mit

$$l_0 = \{x = 0, y = 0, t = -1\} \quad (2.3.3)$$

und

$$n_0 = \{x = 0, y = 0, t = 1\} \quad (2.3.4)$$

zwei einfach geschlossene Kurven.

Sei L eine Lagrange Zylinder in X , der folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $L \cap \{|t| > C\} = \psi_\rho(L_0) \cap \{|t| > C\}$ für ein $C > 0$ und ein $\rho > 0$.

Dann gilt das folgende Theorem:

Theorem 2.3 (Theorem A). *Angenommen, es gibt eine C^k -glatte symplektische Füllung H zwischen L und L_0 , so dass $H \subset H_0$ außerhalb von $\{|t| \leq C\}$ ist. Dann ist L Lagrange unverknotet, d.h. durch eine C^{k-1} -glatte Isotopie Lagrange isotop zu $\psi_\rho(L_0)$, wobei die Isotopie außerhalb von $\{|t| \leq C\}$ so gewählt werden kann, dass sie mit der Standard-Translation übereinstimmt.*

Beweis. Wir gehen wie folgt vor: Zunächst definieren wir eine C^k -glatte Isotopie L_ρ von Lagrangen Untermannigfaltigkeiten, mit L, L_0 als Start- und Endzylinder. Das Problem ist dann, die Isotopie so zu modifizieren, dass sie für große t mit der Standard-Translation übereinstimmt.

Indem wir evtl. eine entsprechende Koordinaten-Transformation vornehmen, genügt es, den Fall $C = 1, \rho = 1$ zu betrachten.

Betrachte die Kurven $l_\rho = \psi_\rho(l_0)$. Es gilt:

$$l_\rho = \{x = \rho, y = 0, t = -1\} \quad (2.3.5)$$

Weiter gilt $l_0 \subset L_0, l_1 \subset L$ und $l_\rho \subset H$ für alle $0 \leq \rho \leq 1$.

Indem wir dem charakteristischen Fluss von H folgen, erhalten wir Lagrange Untermannigfaltigkeiten N_ρ : N_ρ ist die Vereinigung aller Flußlinien von H , die durch l_ρ verlaufen. Für $t < -1$ stimmt N_ρ mit $\psi_\rho(L_0)$ überein. Weiter gilt $N_0 = L_0$ und $N_1 = L$.

Wäre nun N_ρ auf der Menge $\{t > 1\}$ in $\psi_\rho(L_0)$ enthalten, so wären wir fertig. Das ist allerdings nicht ohne weiteres der Fall. Vielmehr ist $N_\rho \cap \{t = 1\}$ eine einfach geschlossene Kurve in $H \cap \{t = 1\} = \{t = 1, y = 0\}$.

Wir bezeichnen den Schnitt $N_\rho \cap \{t = 1, y = 0\}$ mit n_ρ . Für jedes $0 \leq \rho \leq 1$ ist n_ρ eine einfach geschlossene Kurve in $\{t = 1, y = 0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$. Weiter gilt: $n_1 = \psi_1(n_0)$ da $L = \psi_1(L_0)$ außerhalb von $\{|t| < 1\}$.

Für $0 \leq \rho \leq 1$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(\psi_{-\rho}(n_\rho))$ das Volumen der zwischen den Kurven $\psi_{-\rho}(n_\rho)$ und n_0 eingeschlossene Fläche. Dabei betrachten wir

$\psi_{-\rho}(n_\rho)$ als Kurve in $S^1 \times \mathbb{R} \cong \{t = 1, y = 0\} \subset X$. Die Volumenform ist gerade durch die Einschränkung der symplektischen Form ω auf $\{t = 1, y = 0\}$ gegeben. Ist $\psi_{-\rho}(n_\rho)$ in Koordinaten durch $\theta_\rho(\tau), x_\rho(\tau)$ gegeben, so gilt also

$$\mathcal{A}(\psi_{-\rho}(n_\rho)) \tag{2.3.6}$$

$$= \int_{n_0 \cup \psi_{-\rho}(n_\rho)} \theta dx \tag{2.3.7}$$

$$= \int_{S^1} \theta_\rho(z) \frac{\partial x_\rho}{\partial \tau}(z) dz \tag{2.3.8}$$

Lemma 2.4. *Der Ausdruck $\mathcal{A}(\psi_{-\rho}(n_\rho))$ hängt nicht von ρ ab und es gilt*

$$\mathcal{A}(\psi_{-\rho}(n_\rho)) = 0 \tag{2.3.9}$$

für alle $\rho \in [0, 1]$

Beweis. Sei

$$W := \psi_{-\rho}(L_\rho) \tag{2.3.10}$$

Auch W ist eine Lagrange Untermannigfaltigkeit, d.h. $\omega|_W = 0$. Es gilt weiter:

$$W \cap \{t = -1\} = l_0 \tag{2.3.11}$$

$$W \cap \{t = 1\} = \psi_{-\rho}(n_\rho) \tag{2.3.12}$$

Sei

$$\tilde{W} := W \cap \{-1 \leq t \leq 1\} \tag{2.3.13}$$

so dass

$$\partial \tilde{W} = l_0 \cup \psi_{-\rho}(n_\rho) \tag{2.3.14}$$

Nach Definition von \mathcal{A} gilt dann:

$$\mathcal{A}(\psi_{-\rho}(n_\rho)) = \int_{n_0 \cup \psi_{-\rho}(n_\rho)} \theta dx \quad (2.3.15)$$

$$= \int_{\psi_{-\rho}(n_\rho)} (\theta dx + t dy) - \int_{l_0} (\theta dx + t dy) \quad (2.3.16)$$

$$= \int_{\partial \tilde{W}} (\theta dx + t dy) \quad (2.3.17)$$

$$= \int_{\tilde{W}} \omega \quad (2.3.18)$$

$$= 0 \quad (2.3.19)$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\int_{n_0} \theta dx = 0 \quad \int_{l_0} \theta dx + t dy = 0 \quad (2.3.20)$$

□

Wir betrachten die Menge aller C^k -glatten Einbettungen $S^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$. Offenbar sind alle solche Einbettungen gleichzeitig Lagrange Einbettungen von S^1 . Die Zusammenhangskomponente der Standard-Einbettung $\theta \mapsto (\theta, 0)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(S^1 \times \mathbb{R})$.

Lemma 2.5. *Die Menge \mathcal{L} ist einfach zusammenhängend in der C^k -Topologie.*

Beweis. Sei $\gamma_s : S^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ für $s \in S^1$ eine C^k -glatte Familie von einfach geschlossenen Kurven. Sie stellt somit einen einfach geschlossenen Weg in \mathcal{L} dar. Unter der Identifikation $S^1 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 - \{0\}$ können wir die Familie γ_s auch als Familie einfach geschlossener Kurven in \mathbb{R}^2 auffassen.

Wir bezeichnen mit c_0 die Standard-Einbettung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Um zu zeigen, dass \mathcal{L} einfach zusammenhängend in der C^k -Topologie ist, reicht es zu zeigen, dass eine Familie von Abbildungen

$$\gamma_s : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.3.21)$$

existiert, die C^k -glatt in allen Parametern ist und für die gilt:

$$\gamma_s(\cdot, 0) = \gamma_s(\cdot) \quad (2.3.22)$$

$$\gamma_s(\cdot, 1) = c_0(\cdot) \quad (2.3.23)$$

$$\gamma_s(\cdot, t) \neq 0 \quad \forall t \in I, s \in S^1 \quad (2.3.24)$$

Die letzte Bedingung stellt sicher, dass wir $\gamma_s(\cdot, t)$ wieder als Abbildungen in $S^1 \times \mathbb{R}$ auffassen können.

Wir gehen zunächst davon aus, dass alle Kurven γ_s konvex sind. Dann ist das von γ_s eingeschlossene Gebiet auch sternförmig und enthält nach Voraussetzung die Null. Außerdem gibt es aufgrund des kompakten Parameterraumes ein $r > 0$, so dass die abgeschlossene Scheibe

$$D_r := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |v| \leq r\} \quad (2.3.25)$$

für jedes $s \in S^1$ im von γ_s umschlossenen Gebiet enthalten ist. Wir können davon ausgehen, dass $r = 1$, ansonsten reskalieren wir γ_s entsprechend. Wir definieren:

$$\gamma_s(\cdot, t) = t \cdot \frac{\gamma_s(\cdot, 0)}{|\gamma_s(\cdot, 0)|} + (1-t)\gamma_s(\cdot, 0) \quad (2.3.26)$$

Dann ist $\gamma_s(\cdot, t)$ die gesuchte Familie von Abbildungen.

Sind die Kurven γ_s nicht konvex, so verwenden wir den Curve Shortening Flow, bzw. das Theorem von Greyson ([CZ01]), um zunächst eine Familie von konvexen Kurven zu erhalten.

Der Curve Shortening Flow (CSF) ist die Lösung $\gamma(\cdot, t)$ zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = kn \quad (2.3.27)$$

wobei n ein stetiges Einheitsnormalen-Vektorfeld und k die Krümmung von γ bezeichnet.

Für C^k -glatte Kurven γ_0 , $k > 2$ als Anfangsbedingung existiert der CSF lokal, d.h. es gibt ein $\omega \leq \infty$ und eine für $t \in [0, \omega)$ definierte Lösung $\gamma(\cdot, t)$ (vgl. Proposition 1.2 in [CZ01]).

Der Curve Shortening Flow erhält nicht nur Konvexität sondern hat außerdem die Eigenschaft alle Kurven nach endlicher Zeit konvex zu machen:

Theorem 2.6 (Greyson, [CZ01] 5.1). *Betrachte den Curve Shortening Flow für eine glatte, eingebettete, geschlossene Kurve. Dann existiert ein $t_0 < \omega$, so dass $\gamma(\cdot, t)$ uniform konvex für alle $t \in (t_0, \omega]$ ist.*

Damit gibt es also in unserer Situation für beliebiges $s \in S^1$ eine Lösung $\gamma_s(\cdot, t)$ des CSF mit Anfangswert $\gamma_s(\cdot)$ und ein $t_0(s)$ so dass $\gamma_s(\cdot, t_0)$ konvex ist.

Damit gibt es für jedes s eine Umgebung U_s von s , so dass $\gamma_{s'}(\cdot, t_0)$ für $s' \in U_s$ existiert und uniform konvex ist.

Da S^1 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_i\} \subset \{U_s\}$.

Sei nun $f_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine an $\{U_i\}$ adaptierte Zerlegung der Eins. Wir definieren eine glatte Funktion

$$g(s) = \sum_i f_i(s) \cdot t_i, \quad (2.3.28)$$

wobei $t_i > 0$ so gewählt ist, dass alle $\gamma_s(\cdot, t_i)$ konvex für $s \in U_i$.

Da der CSF, die Eigenschaft, konvex zu sein, erhält, ist

$$\tilde{\gamma}_s(\cdot, t) = \gamma_s(\cdot, t/g(s)). \quad (2.3.29)$$

eine C^k -glatte Isotopie des Weges γ_s auf einen Weg $\tilde{\gamma}_s(\cdot, 1)$ von konvexen Kurven.

□

Es sei $\mathcal{L}_0 = \mathcal{A}^{-1}(0)$ die Menge aller Kurven $n \in \mathcal{L}$ für die die zwischen n und n_0 eingeschlossene Fläche vom Volumen 0 ist. Dann gilt:

Lemma 2.7. *Die Menge \mathcal{L}_0 ist einfach zusammenhängend in der C^k -Topologie.*

Beweis. Diese Tatsache folgt aus Lemma 2.5 und der einfachen Tatsache, dass \mathcal{L}_0 ein Deformationsretrakt von \mathcal{L} ist (s. Proposition 2.3.A in [EP96])

□

Identifizieren wir $\{t = 1, y = 0\}$ mit $S^1 \times \mathbb{R}$, so ist $\psi_{-\rho}(n_\rho)$ eine Schleife in \mathcal{L}_0 und damit nach Lemma 2.7 zusammenziehbar in der C^k -Topologie. Es gibt also eine C^k -glatte 2-Parameter Familie $m_{\rho, s}$ mit

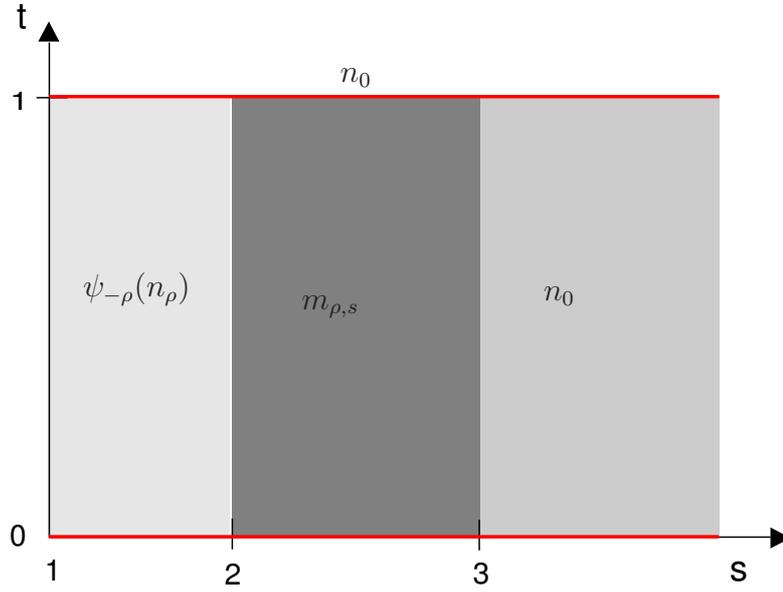


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Isotopie $m_{\rho,s}$.

- (i) $m_{\rho,s} = \psi_{-\rho}(n_\rho)$ für $1 \leq s \leq 2$
- (ii) $m_{\rho,s} = n_0$ auf $\{s > 3\} \cup \{\rho = 0\} \cup \{\rho = 1\}$

Wir führen einen Parameter τ auf den Kurven $m_{\rho,s}$ ein, so dass $m_{\rho,s}$ in den Koordinaten θ, x die folgende Form annimmt:

- (i) $\theta_\rho(s, \tau) = \tau$ und $x_\rho(s, \tau) = 0$ auf $\{s > 3\} \cup \{\rho = 0\} \cup \{\rho = 1\}$
- (ii) $\theta_\rho(s, \tau) = \theta_\rho(1, \tau)$ und $x_\rho(s, \tau) = x_\rho(1, \tau)$ für $1 \leq s \leq 2$

Wir können nun die Funktion

$$y_\rho(s, T) = \int_0^T \left(\frac{\partial \theta_\rho}{\partial \tau} \frac{\partial x_\rho}{\partial s} - \frac{\partial \theta_\rho}{\partial s} \frac{\partial x_\rho}{\partial \tau} \right)(s, z) dz \quad (2.3.30)$$

definieren.

Lemma 2.8. *Die oben definierte Funktion y_ρ ist $C^{(k-1)}$ -glatt und es gilt:*

$$y_\rho(s, 0) = y_\rho(s, 2\pi) \quad (2.3.31)$$

d.h. y_ρ ist geschlossen.

Beweis. Um zu zeigen, dass $y_\rho(s, 0) = y_\rho(s, 2\pi)$ stellen wir zunächst fest, dass aus Lemma 2.4 folgt, dass

$$\mathcal{A}(m_{\rho,s}) = 0 \quad (2.3.32)$$

und damit aufgrund der Symmetrie der symplektischen Form

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\theta_\rho \frac{\partial x_\rho}{\partial \tau}(s, z) - x_\rho \frac{\partial \theta_\rho}{\partial \tau}(s, z) \right) dz \quad (2.3.33)$$

Wir leiten diesen Term nach s ab und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \theta_\rho}{\partial s} \frac{\partial x_\rho}{\partial \tau}(s, z) + \theta_\rho \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial \tau \partial s}(s, z) \right) dz \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial x_\rho}{\partial s} \frac{\partial \theta_\rho}{\partial \tau}(s, z) - x_\rho \frac{\partial^2 \theta_\rho}{\partial \tau \partial s}(s, z) \right) dz \end{aligned}$$

Also ist:

$$y_\rho(s, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \left(\theta_\rho \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial \tau \partial s}(s, z) - x_\rho \frac{\partial^2 \theta_\rho}{\partial \tau \partial s}(s, z) \right) dz \quad (2.3.34)$$

Indem wir partiell integrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned} y_\rho(s, 2\pi) &= - \int \frac{\partial \theta_\rho}{\partial \tau} \frac{\partial x_\rho}{\partial s}(s, z) dz + \int \frac{\partial x_\rho}{\partial \tau} \frac{\partial \theta_\rho}{\partial s}(s, z) dz \\ &= -y_\rho(s, 2\pi), \end{aligned}$$

wobei wir die Periodizität von θ_ρ und x_ρ verwendet haben.

Damit folgt die Tatsache, dass tatsächlich $y_\rho(s, 2\pi) = 0$. \square

Wir können nun Lagrange Untermannigfaltigkeiten M_ρ definieren durch

$$(s, \tau) \mapsto (\theta_\rho(s, \tau), s, x_\rho(s, \tau) + \rho, y_\rho(s, \tau)) \quad (2.3.35)$$

Nach Konstruktion sind die M_ρ Lagrange und stimmen für $1 \leq s \leq 2$ mit N_ρ überein.

Für $s \geq 3$ stimmt M_ρ dagegen mit $L_\rho = \psi_\rho(L_0)$ überein. Indem wir also N_ρ und M_ρ entlang $1 \leq s \leq 2$ verkleben und M_ρ für $s \geq 3$ durch L_ρ fortsetzen, erhalten wir eine C^{k-1} -glatte Familie von Lagrange Untermannigfaltigkeiten, die L mit dem Nullschnitt verbindet und außerhalb von $\{|t| \leq C\}$

mit den Standard-Zylindern L_ρ übereinstimmt. Damit ist das Theorem 2.3 bewiesen. \square

Kapitel 3

Minimalflächen

Um symplektische Füllungen zu konstruieren, müssen wir versuchen, Familien geeigneter symplektischer Flächen mit gegebenen Randbedingungen zu definieren. Die Eigenschaft, symplektisch zu sein, ist offen und damit sehr flexibel. Um konkrete Flächen zu erhalten, wird man sich also auf Lösungen von Differentialgleichungen zurückziehen müssen, die gleichzeitig garantieren, dass ihre Lösungen symplektisch sind. Zunächst denkt man dabei an pseudoholomorphe Kurven. Darunter verstehen wir die Bilder von Abbildungen $f : \Sigma \rightarrow M$ in eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) mit kompatibler fast-komplexer Struktur J , die die Differentialgleichung

$$\bar{\partial}f = \frac{1}{2}(df - J \circ f \circ i) = 0 \quad (3.0.1)$$

erfüllen. Aus der ω -Kompatibilität der fast komplexen Struktur folgt sofort, dass eine eingebettete pseudoholomorphe Kurve stets auch eine symplektische Untermannigfaltigkeit in M ist. Allerdings sind pseudoholomorphe Kurven äußerst starr und recht schwer zu kontrollieren, auch wenn sie sich an anderen Stellen als äußerst nützlich Instrument erwiesen haben.

Etwas flexibler - aber in vielen Punkten den holomorphen Kurven ähnlich, da ebenfalls Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung - verhalten sich Minimalflächen. Dabei stellen wir fest, dass jede pseudoholomorphe Kurve auch eine Minimalfläche bezüglich der von J (und ω) induzierten Metrik g_J ist. Wir erweitern also die Menge der betrachteten Objekte, um mehr

Flexibilität zu erhalten, bezahlen aber gleichzeitig damit, dass Minimalflächen nicht mehr automatisch symplektisch sind. Es ist daher unsere Aufgabe, geeignete Bedingungen zu finden, unter denen wir sicherstellen können, dass Minimalflächen symplektisch sind. Diese Untersuchung ist das zentrale Thema dieses Kapitels.

Wir wollen im Folgenden einige Grundlagen zum Thema Minimalflächen zusammentragen, die für uns von Bedeutung sind. Zunächst betrachten wir die grundlegenden Definitionen und untersuchen dann topologische Voraussetzungen, unter denen sich Verzweigungspunkte ausschließen lassen, bzw. Minimalflächen eingebettet sind. Schließlich untersuchen wir spezielle Eigenschaften von Minimalflächen in Kähler-Mannigfaltigkeiten.

Minimalflächen sind ein klassisches Thema in der Geometrie und relativ gut verstanden. Für uns wird es wichtig sein, die symplektischen Eigenschaften von Minimalflächen zu verstehen. Eines der wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels ist, dass die Anzahl von komplexen Punkten und die Existenz Lagranger Punkte durch topologische Invarianten beschrieben werden. Betrachtet man folglich Familien von Minimalflächen mit Rand, so reicht es, die Randdaten geeignet vorzugeben, um eine globale Kontrolle über komplexe und Lagrange Punkte der Minimalflächen zu erhalten. Auf diesem Weg können wir für Minimalflächen die Eigenschaft symplektisch zu sein kontrollieren, solange wir genügend gute Aussagen über das Randverhalten treffen können.

Dabei betrachten wir Eigenschaften komplexer Punkte auf Minimalflächen und ihren Zusammenhang zu charakteristischen Klassen. Wir stellen einige bekannte Ergebnisse vor und erläutern ihren Hintergrund. Wir übertragen diese Prinzipien dann auf Minimalflächen mit Rand. Durch Anwendung des Minimumprinzips auf die Tangentialabbildung der Minimalfläche können wir dann auch das Entstehen von Lagranger Punkten im Inneren der Flächen kontrollieren.

Schließlich werden wir geeignete Randbedingungen untersuchen. Nachdem wir gezeigt haben, dass Lagrange Punkte nicht spontan im Inneren entstehen können, müssen wir untersuchen, welche Bedingungen nötig sind, um

das Entstehen Lagrange Punkte auf dem Rand einer Minimalfläche auszuschließen.

3.1 Definition und Grundlagen

Sei Γ eine einfach geschlossene Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (X, g) , d.h. das Bild einer differenzierbaren Einbettung $\alpha : S^1 \rightarrow X$. Für eine Übersicht über bekannte Ergebnisse in der Theorie der Minimalflächen sei [CM06] oder auch [Oss86] empfohlen.

Eine orientierbare Fläche $M \subset X$ mit $\partial M = \Gamma$ ist dann eine Minimalfläche, wenn sie ein kritischer Punkt des Flächenfunktionalis ist. Bezeichnet also $Vol(M)$ das Volumen von M mit der auf M induzierten Metrik, so soll für jede normale Variation

$$M_t = \{x + tn(x) \mid x \in M\} \quad (3.1.1)$$

mit einem normalen Vektorfeld $n \in NM$, $n|_{\partial M} = 0$ gelten:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(M_t) = 0 \quad (3.1.2)$$

Es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(M_t) = \int_M g(n, H) \quad (3.1.3)$$

wobei H den mittleren Krümmungsvektor von M bezeichnet. Diese Beziehung wird auch als erste Variationsformel bezeichnet. Es folgt, dass eine Fläche genau dann Minimalfläche ist, wenn die mittlere Krümmung verschwindet: $H = 0$ überall.

Man beachte, dass die kritischen Punkte des Energie-Funktionalis nicht notwendigerweise auch lokale Minima sein müssen. Insofern ist die Bezeichnung "Minimalfläche" irreführend. Eine Minimalfläche, für die für jede normale Variation M_t mit einem glatten, normalen Vektorfeld $n \in NM$ entlang M mit $n|_{\partial M} = 0$ gilt:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} Vol(M_t) \geq 0 \quad (3.1.4)$$

heißt stabil. Die minimale Fläche M ist dann tatsächlich ein lokales Minimum des Flächen-Funktional.

Ist nun $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche im euklidischen dreidimensionalen Raum, so lässt sich leicht zeigen, dass die Koordinaten-Funktionen von M harmonische Funktionen sind. Diese Tatsache lässt sich verwenden, um Maximumsprinzipien auf Minimalflächen anzuwenden. So gilt beispielsweise:

Proposition 3.1 (Proposition 1.2 [CM06]). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Minimalfläche mit Rand. Dann ist die Minimalfläche in der konvexen Hülle ihrer Randbedingungen enthalten:*

$$M \subset \text{ConvHull}(\partial M) \quad (3.1.5)$$

Häufig ist es nützlich, gleich parametrisierte Minimalflächen zu betrachten, z.B. bei der Lösung von Randwertproblemen. Betrachten wir beispielsweise minimale Abbildungen der Scheibe $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$:

Eine minimale Abbildung von D^2 in X mit Rand Γ ist eine Abbildung $f : D^2 \rightarrow X$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\Delta f = 0$, d.h. f ist harmonisch.
- (ii) $g(f_x, f_y) = 0$
- (iii) $|f_x|^2 = |f_y|^2$
- (iv) Die stetige Fortsetzung $f : S^1 = \partial D^2 \rightarrow \Gamma$ von f auf $\partial D^2 = S^1$ ist ein Homöomorphismus.

Dabei verwenden wir die Schreibweise $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ für Koordinaten (x, y) auf D^2 . Eine minimale Abbildung ist also eine harmonische, konforme Abbildung der Scheibe in X , die auf dem Rand einen Homöomorphismus auf die gegebenen Randdaten induziert. Entsprechend können wir minimale Abbildungen auf anderen Definitionsbereichen, z.B. dem Annulus $A_\rho = \{z \in D^2 \mid |z| > \rho\}$ definieren.

Abschließend wollen wir die Gauss-Abbildung einer orientierten Minimalfläche in \mathbb{R}^3 betrachten. Sei n eine Einheitsnormale entlang M . Dann definiert n eine Abbildung

$$n : M \rightarrow S^2, \quad (3.1.6)$$

die Gauss-Abbildung. Durch eine auf M gegebene Orientierung wird n eindeutig bestimmt. Ihr Differential $dn : TM \rightarrow TS^2$ lässt sich unter der Identifikation $T_p M \cong T_{n(p)} S^2$ als Selbstabbildung von $T_p M \rightarrow T_p M$ auffassen. Wir bezeichnen die Eigenwerte von dn mit k_1, k_2 . Die zugehörigen Eigenvektoren heißen Hauptkrümmungsrichtungen von M in p . Die mittlere Krümmung ist dann gegeben als $|H| = k_1 + k_2$, die Gauss-Krümmung K durch das Produkt $k_1 k_2$. Da M Minimalfläche folgt mit $|H| = 0$ dass $k_1 = -k_2$ und somit $K \leq 0$: Eine Minimalfläche in \mathbb{R}^3 hat überall nicht-positive Gauss-Krümmung. Außerdem folgt, dass die Gauss-Abbildung einer Minimalfläche eine konforme Abbildung ist.

3.2 Eingebettetheit von Minimalflächen

Sei $X = T^*(S^1 \times \mathbb{R})$ und $M \subset X$ ein minimaler Annulus in X , parametrisiert durch eine Abbildung

$$f : A_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho < |z| < 1\} \rightarrow M \subset X \quad (3.2.1)$$

für die i)-iv) erfüllt ist, d.h. f sei eine harmonische, konforme Abbildung und Homöomorphismus auf dem Rand. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen eine solche Abbildung eine Einbettung ist. Zunächst betrachten wir das Auftreten von Verzweigungspunkten.

Ein Verzweigungspunkt von M ist ein Punkt $p \in A_\rho$ an dem $df(p) = 0$. Betrachten wir das komplexe Differential

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} f - i \frac{\partial}{\partial y} f \right), \quad (3.2.2)$$

so hat F an einem Verzweigungspunkt eine Nullstelle endlicher Ordnung λ . Da f harmonisch ist, ist F holomorph. Nach Übergang zu holomorphen

Koordinaten gilt:

$$(F_1(z), F_2(z)) = (z - p)^\lambda (G_1(z), G_2(z)) \quad (3.2.3)$$

für $\lambda \geq 0$ und ein holomorphes $G = (G_1, G_2)$ mit $G \neq 0$. Wir bezeichnen mit $\text{ind}(p) := \lambda$ die Ordnung des Verzweigungspunktes p . Dabei ist $\text{ind}(p)$ unabhängig von der Wahl der Koordinaten. In einem Punkt p , welcher kein Verzweigungspunkt ist, gilt $F \neq 0$ und wir definieren $\text{ind}(p) = 0$.

Für eine Kurve c in A_p bezeichne k den Krümmungsvektor von $f \circ c$ in X und k^\perp die geodätische Krümmung von c in M .

Lemma 3.2. *Sei p ein isolierter Verzweigungspunkt von M . Sei $U \subset M$ eine offene Umgebung in M von p , in der keine weiteren Verzweigungspunkte liegen und $c \subset U$ ein Kreis vom Radius $\epsilon > 0$ um p . Für $\epsilon \rightarrow 0$ gilt*

$$\int_c k^\perp \rightarrow 2\pi(\text{ind}(p) + 1) \quad (3.2.4)$$

wobei $\text{ind}(p)$ den Index des Verzweigungspunktes bezeichnet.

Beweis. Für eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von p sei $F : U \rightarrow X$ eine Parametrisierung der Minimalfläche um p , so dass $p = F(0)$. Nach [MW95] gibt es ein normales Koordinatensystem $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^4$ und einen Diffeomorphismus $u : U \rightarrow U$ so dass $\tilde{F} = \phi \circ F \circ u$ von der Form

$$\tilde{F} : z \rightarrow (z^Q, f(z)) \quad (3.2.5)$$

ist. Dabei ist $f(z) = O_2(|z| + 1)$. Man beachte, dass $Q - 1$ genau dem Index des Verzweigungspunktes p entspricht.

Wir nehmen im Folgenden an, dass bereits die Parametrisierung F von obiger Form ist.

Sei nun für ein $m \in \mathbb{N}$ die Abbildung $F_m(z) = m^Q F(m^{-1}z)$ gegeben und bezeichne $c(\theta) = e^{i\theta}$ der Kreis vom Radius 1 um 0. Dann gilt für $F_m \circ c$ (also das Bild des es unter F_m):

$$F_m(c(\theta)) = m^Q F(m^{-1}e^{i\theta}) \quad (3.2.6)$$

$$= ((e^{i\theta})^Q, m^Q f(m^{-1}e^{i\theta})) \quad (3.2.7)$$

Da $f(z) = O_2(|z| + 1)$, konvergiert F_m für $m \rightarrow \infty$ in C^2 gegen

$$\theta \mapsto ((e^{iQ\theta}), 0) \quad (3.2.8)$$

Unter Reskalierung bleibt die totale geodätische Krümmung invariant. Daher stimmt die geodätische Krümmung von $F_m \circ c$ mit der von $F(m^{-1}c)$ überein.

Wählen wir für $m \rightarrow \infty$ also immer kleinere Wege c_m um p und messen ihre geodätische Krümmung unter F , so gilt:

$$\int_{c_m} k_{c_m}^\perp \rightarrow 2\pi Q \quad (3.2.9)$$

mit $Q = \text{ind}(p) + 1$. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Nachdem wir nun die lokale Situation an einem Verzweigungspunkt analysiert haben, wenden wir Gauss-Bonnet an, um zu folgendem Ergebnis zu kommen:

Proposition 3.3. *Sei M ein minimaler Annulus mit C^k -glattem Rand ∂M . Falls die totale Krümmung des Randes $\leq 2\pi$ und M keine Verzweigungspunkte auf dem Rand hat, so ist M im Inneren unverzweigt.*

Remark 3.4. Ist $c : S^1 \rightarrow \partial M$ eine Bogenlängen-Parametrisierung einer Randkomponente $\Gamma \subset \partial M \subset X$ mit Parameter s , so verstehen wir unter der Totalkrümmung von Γ den Wert

$$tc(\partial M) = \int_S^1 \left| \frac{\partial^2 c}{\partial^2 s} \right| ds \quad (3.2.10)$$

also das Integral über den Absolutbetrag der zweiten Ableitung von c entlang Γ .

Die totale Krümmung des Randes eines Annulus ist dann die Summe der Totalkrümmung der Randkomponenten.

Beweis. Wir wählen für $M \subset X$ eine Parametrisierung

$$F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X \quad (3.2.11)$$

und bezeichnen mit γ, Γ die beiden Randkomponenten

$$\gamma = F(S^1 \times \{0\}) \quad (3.2.12)$$

$$\Gamma = F(S^1 \times \{1\}) \quad (3.2.13)$$

Nach Voraussetzung hat M keine Verzweigungspunkte auf dem Rand. Nehmen wir nun an, M sei nicht eingebettet. Dann bezeichnen wir mit $p_i \in M, i = 1 \dots l$ die Verzweigungspunkte von M . An jedem Verzweigungspunkt p_i sei c_i der um $f^{-1}(p_i) \in A$ mit Radius $< \epsilon$. Die singulären Punkte liegen isoliert und wir können daher annehmen, dass für ϵ klein genug alle c_i disjunkt liegen. Nach Gauss-Bonnet gilt:

$$\int_{\gamma} k_{\gamma}^{\perp} + \int_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\perp} + \sum_i \int_{c_i} k_i^{\perp} + \int_M K_M = 2\pi(1 - l) \quad (3.2.14)$$

wobei $k_{\gamma}^{\perp}, k_{\Gamma}^{\perp}$ die geodätische Krümmung in M der beiden Randkomponenten bezeichnet: $k_{\gamma}^{\perp} = \langle k_{\gamma}, n \rangle$, wobei n der äußere Normalenvektor der Minimalfläche M entlang γ ist. Entsprechend bezeichne k_i^{\perp} die geodätische Krümmung entlang c_i . Da M eine Minimalfläche ist, gilt $K_M \leq 0$ überall. Wir bemerken, dass aus $\int_M K_M = 0$ folgt, dass M flach ist. In diesem Fall ist die Aussage des Theorems trivialerweise erfüllt. Wir gehen daher im Folgenden davon aus, dass M nicht flach ist und folgern:

$$\int_M K_M < 0 \quad (3.2.15)$$

Daher gilt

$$\int_{\gamma} k_{\gamma}^{\perp} + \int_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\perp} - \sum_i \int_{c_i} k_i^{\perp} > 2\pi(1 - l) \quad (3.2.16)$$

Nach 3.2.4 gilt aber

$$\int_{c_i} k_i^{\perp} \rightarrow -2\pi \operatorname{ind}(p_i) \quad (3.2.17)$$

für $\epsilon \rightarrow 0$. Mit dem Gauß-Bonnet folgt dann

$$\int_{\gamma} k_{\gamma}^{\perp} + \int_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\perp} - 2\pi \quad (3.2.18)$$

$$> \sum_i \int_{c_i} k_i^{\perp} - 2\pi l \quad (3.2.19)$$

$$\rightarrow 2\pi \sum_i \text{ind}(p_i) \quad (3.2.20)$$

für $\epsilon \rightarrow 0$. An einem singulären Punkt p_i gilt

$$\text{ind}(p_i) > 1 \quad (3.2.21)$$

Damit gilt:

$$2\pi \sum_i \text{ind}(p_i) \geq 2\pi l \quad (3.2.22)$$

Daraus folgt die Behauptung, denn für $2\pi \leq \text{tc}(\Gamma) + \text{tc}(\gamma)$ folgt $l = 0$, es kann also keine Verzweigungspunkte geben. \square

Unter geeigneter Kontrolle an die Totalkrümmung der Randdaten können wir nun also sicherstellen, dass Minimalflächen im Inneren unverzweigt sind.

Tatsächlich lässt sich dieses Argument auch auf den Rand ausweiten. Dazu verwenden wir eine Version der Gauss-Bonnet-Formel für verzweigte Minimalflächen (s. [DHKW92], Abschnitt 7.11). Betrachten wir einen minimalen Annulus $M \subset S^1 \times \mathbb{R}^3$ mit mindestens $C^{2,\alpha}$ -glatten, einfach geschlossenen und disjunkten Rändern (Γ, γ) . Mit $w_j, j = 1, \dots, J$ bezeichnen wir die inneren Verzweigungspunkte von M , mit $\eta_l, l = 1, \dots, L$ die Verzweigungspunkte auf dem Rand.

Dann gilt (vgl. [HT09]):

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_M K_M \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\perp} + \int_{\gamma} k_{\gamma}^{\perp} \right) = \sum_{j=1}^J \text{ind}(w_j) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \text{ind}(\eta_l) \quad (3.2.23)$$

Wie zuvor nehmen wir an, dass M nicht flach ist, und daher

$$\int_M K_M < 0. \quad (3.2.24)$$

Dann gilt insbesondere

$$\sum_{l=1}^L n(\eta_l) < \frac{1}{\pi} \left(\int_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\perp} + \int_{\gamma} k_{\gamma}^{\perp} \right) \quad (3.2.25)$$

und somit (vgl. [HT09], Formel (18))

$$\sum_{l=1}^L n(\eta_l) < \frac{1}{\pi} (\text{tc}(\Gamma) + \text{tc}(\gamma)). \quad (3.2.26)$$

Da Verzweigungspunkte auf dem Rand stets von gerader Ordnung sind, folgt damit sofort:

Lemma 3.5. *Falls $\text{tc}(\Gamma) + \text{tc}(\gamma) \leq 2\pi$, so hat M keine Verzweigungspunkte auf dem Rand.*

Zusammen mit Proposition 3.3, oder einfach durch analoge Anwendung der Gauss-Bonnet-Formel auf innere Verzweigungspunkte erhalten wir:

Proposition 3.6. *Sei $M \subset X \cong S^1 \times \mathbb{R}^3$ ein minimaler Annulus mit C^k -glattem Rand ∂M . Falls die totale Krümmung des Randes $\leq 2\pi$ ist, so besitzt M keine Verzweigungspunkte, weder im Inneren, noch auf dem Rand.*

Wir vermuten, dass Minimalfläche deren Randkrümmung $< 2\pi$ ist, auch eingebettet sind. In [EWW02] konnten Ekholm, White, Wienholtz das folgende Theorem für minimale Scheiben in \mathbb{R}^N zeigen:

Theorem 3.7 (Theorem 2.1 in [EWW02]). *Sei Γ eine einfach geschlossene Kurve in \mathbb{R}^N mit totaler Krümmung $\leq 4\pi$. Sei M eine Minimalfläche mit Rand Γ . Dann ist das Innere von M eingebettet und M hat keine inneren Verzweigungspunkte.*

Tatsächlich gelingt es ihnen sogar, Regularität am Rand zu zeigen:

Theorem 3.8 (Theorem 3.2 in [EWW02]). *Sei Γ eine glatte einfach geschlossene Kurve in \mathbb{R}^N mit totaler Krümmung $\leq 4\pi$. Sei M eine Minimalfläche mit Rand Γ . Dann ist M eine glatte eingebettete Mannigfaltigkeit mit Rand.*

Der Beweis des ersten Theorems beruht auf der Anwendung des Satzes von Gauss-Bonnet und einer Analyse der Eigenschaften von Minimalflächen an Verzweigungspunkten. Die Argumente lassen sich auch auf Minimalflächen andern topologischen Typs und mit mehreren Randkomponenten übertragen. Allerdings lassen sich diese Überlegungen nicht ohne weiteres auf Minimalflächen in nicht mehr einfach-zusammenhängenden Räumen übertragen. Zur Abschätzung der Dichte sind Kegel nötig, die sich nur in einfach-zusammenhängenden Räumen sinnvoll definieren lassen. Trotz allem besteht Anlass zur Vermutung, dass analog für minimale Annuli in $S^1 \times \mathbb{R}^3$ gilt:

Vermutung 3.9. *Seien Γ, γ zwei disjunkte, C^k -glatte, einfach geschlossene Kurven in $S^1 \times \mathbb{R}^3$ mit totaler Krümmung $tc(\Gamma) + tc(\gamma) \leq 2\pi$. Sei M ein minimaler Annulus mit Rand Γ, γ . Dann ist M eingebettet.*

3.3 Komplexe Punkte

Im Folgenden wollen wir das Auftreten komplexer Punkte auf Minimalflächen in Kähler-Mannigfaltigkeiten untersuchen. Es stellt sich heraus, dass sich die Anzahl komplexer Punkte durch topologische Invarianten darstellen lässt. Genauer gesagt können wir komplexe Punkte auf einer Minimalfläche durch Nullstellen von Vektorfeldern beschreiben. Auf der anderen Seite steht die Anzahl von Nullstellen eines Vektorfeldes über einer Fläche in Beziehung zu topologischen Invarianten wie der Euler-Zahl und der Chern-Zahl. Es zeigt sich, dass für Minimalflächen mit Rand die Anzahl der komplexen Punkte stabil bleibt, solange keine solchen über dem Rand entstehen.

Für eine geschlossene, orientierte Fläche M in einer (fast-)komplexen Mannigfaltigkeit X gibt es verschiedene topologische Invarianten. Es handelt sich dabei um Invarianten der verschiedenen Bündel, die sich über einer Untermannigfaltigkeit finden. Die Chern-Zahl $c_1(M)$ ist die Chern-Klasse $c_1(f^*TX)$ ausgewertet auf M , wobei $f : M \rightarrow X$ die Inklusion von M in X sei. Neben der Euler-Zahl $\chi(M) = \chi(f^*TM)$ von M , kann man für Immersionen die Euler-Charakteristik $\nu(M) = \chi(f^*NM)$ des Normalenbündels betrachten. Letztere hängt von f ab und entspricht im Falle einer Einbet-

tung der topologischen Selbstschnittzahl von M in X . Diese Invarianten sind topologischer Natur, d.h. sie bleiben unter (kleinen) stetigen Deformationen invariant.

Im Folgenden sei X eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit, d.h. eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer fast komplexen Struktur J .

Ist M eine komplexe Fläche in X , so spaltet das Tangentialbündel von X über M komplex in zwei komplexe Linienbündel

$$f^*TX \cong f^*TM \oplus f^*NM. \quad (3.3.1)$$

Es gilt dann die wohlbekanntete Adjunktionsformel:

$$c_1(f^*TX)[M] = c_1(f^*TM)[M] + c_1(f^*NM)[M] \quad (3.3.2)$$

$$= \chi(M) + \nu(M) \quad (3.3.3)$$

Im Allgemeinen sind Flächen in einer (fast-)komplexen Mannigfaltigkeit natürlich keine komplexen Untermannigfaltigkeiten. Es können aber einige komplexe Punkte auftreten, an denen T_pM ein komplexer Unterraum von T_pX ist.

Definition 3.10. Sei $M \subset X$ eine immersierte Fläche in einer fast-komplexen Mannigfaltigkeit (X, J) . Ein Punkt $p \in M$ heißt komplexer Punkt von M , falls T_pM ein komplexer, d.h. J -invarianter, Unterraum von T_pX ist.

An einem komplexen Punkt gilt also:

$$v \in T_pM \Rightarrow Jv \in T_pM. \quad (3.3.4)$$

Ist T_pM ein komplexer Unterraum, so induziert $J : T_pM \rightarrow T_pM$ eine Orientierung auf T_pM . Je nachdem ob diese Orientierung mit der Orientierung von M übereinstimmt nennen wir p einen holomorphen oder antiholomorphen Punkt.

Zu einem komplexen Punkt gehört ein Index, bzw. eine Vielfachheit. Bei genauerer Betrachtung können wir nämlich komplexe Punkte durch Nullstellen von Schnitten in geeigneten Bündeln beschreiben. Diese Sichtweise

macht eine Unterscheidung nach Vielfachheit der Nullstelle bzw. des komplexen Punktes einleuchtend.

Sei also p ein komplexer Punkt von M . Wir nehmen an, dass p isoliert ist, d.h. es gibt eine punktierte Umgebung von p , in der keine komplexen Punkte liegen.

Die Euler-Zahl von M entspricht der Anzahl von Nullstellen eines Schnittes von TM , gezählt mit Vielfachheiten. Um eine Beziehung zwischen der Anzahl der komplexen Punkte von M und der Euler-Zahl von M herzustellen, müssen wir also eine Beziehung zwischen den Nullstellen eines geeigneten Vektorfeldes und den komplexen Punkten von M herstellen.

Wir beginnen mit einer lokalen Sicht in einer Umgebung von p . Dazu sei v ein lokal gegebenes, nicht-verschwindendes Vektorfeld um p entlang M . Für eine zu J kompatible Riemannsche Metrik g bezeichnen wir mit $\pi = \pi|_{JTM}$ die Einschränkung der orthogonalen Projektion $\pi : TX \rightarrow NM$ auf JTM . Dabei bezeichnet NM das Normalenbündel NM von M .

Außerhalb von p ist π ein Isomorphismus von Vektorbündeln. Der Schnitt πJv hat eine isolierte Nullstelle in p . Der Index $\text{ind}(p)$ des komplexen Punktes ist die Vielfachheit $\text{ind}_p(v)$ dieser Nullstelle. Mit anderen Worten: Der Index des komplexen Punktes ist die Windungszahl des Vektorfeldes πJv über einem "kleinen" Weg um p . Diese Windungszahl hängt natürlich von der Orientierung von M und NM ab. Wir wählen die Orientierungen so, dass die Orientierung von NM die Orientierung von TM so ergänzt, dass sich die (durch die komplexe Struktur gegebene) Orientierung von TX ergibt. Orientieren wir M umgekehrt, so ändert sich auch die Orientierung von NM und die Windungszahl bleibt gleich. Die Definition des Index hängt somit nicht mehr von der Orientierung von M ab.

Sei nun M eine Minimalfläche mit isolierten komplexen Punkten. Dann bezeichnen wir mit P die Summe über die Indizes der holomorphen Punkte und mit Q die Summe über die Indizes der anti-holomorphen Punkte.

Es macht Sinn, davon auszugehen, dass komplexe Punkte isoliert liegen. Setzen wir nämlich voraus, dass X eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur J und zugehöriger Kähler-Metrik g ist so gilt (s. [Web84])

Proposition 2):

Proposition 3.11. *Sei X eine Kähler-Mannigfaltigkeit und M eine immerisierte, verzweigte Minimalfläche in X . Dann ist M entweder überall komplex oder M hat nur isolierte komplexe Punkte.*

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass X eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist und somit entweder alle komplexen Punkte von M isoliert liegen, oder M überall holomorph bzw. anti-holomorph ist.

Nehmen wir zunächst an, die Minimalfläche M sei nicht überall holomorph bzw. anti-holomorph, d.h. M besitzt nur isolierte komplexe Punkte. Sei v nun ein auf ganz M definiertes Vektorfeld in TM , welches in den komplexen Punkten von M nicht verschwindet. Da die komplexen Punkte auf M isoliert liegen, gibt es immer ein solches Vektorfeld. Wir bezeichnen mit π_N die Projektion von TX auf das Normalenbündel von M . Dann hat das Vektorfeld $\pi_N Jv$ genau dann eine Nullstelle in p , falls entweder p ein komplexer Punkt von M ist oder v eine Nullstelle in p hat.

Ist p eine Nullstelle von v mit Index $ind_p(v)$, so gilt ([Web84], [Web85])

$$ind_p(\pi_N Jv) = -ind(p) \quad (3.3.5)$$

Bezeichnen wir mit K die Menge der komplexen Punkte von M , so gilt:

$$\begin{aligned} -(P + Q) &= -\sum_{p \in K} ind(p) \\ &= \sum_{p \in K} ind_p(\pi_N Jv) \\ &= \sum_{p \in K} ind_p(\pi_N Jv) + \sum_{q \in \{v=0\}} ind_q(\pi_N Jv) + \sum_{q \in \{v=0\}} ind_q(v) \\ &= \sum_{p \in \{\pi_N Jv=0\}} ind_p(\pi_N Jv) + \sum_{p \in \{v=0\}} ind_p(v) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Ist M eine geschlossene Mannigfaltigkeit, so folgt die einprägsame Beziehung:

$$-(P + Q) = \chi(M) + \nu(M) \quad (3.3.7)$$

Als weitere wichtige Invariante in komplexen Mannigfaltigkeiten können wir die Chern-Klasse von X auf M auswerten. Da wir Minimalflächen mit Rand untersuchen wollen, müssen wir erneut lokale Betrachtungen anstellen und Nullstellen von Schnitten zählen - diesmal im Determinantenbündel von TX . Bevor wir damit beginnen, benötigen wir einige Notation.

Betrachte das komplexifizierte Vektorbündel $V^{\mathbb{C}} = TX \otimes \mathbb{C}$. Die komplexe Struktur J auf TX liftet zu einer komplexen Struktur auf $V^{\mathbb{C}}$. Das Bündel $V^{\mathbb{C}}$ zerfällt in die $i, -i$ -Eigenbündel von J , die wir mit $V^{(1,0)}, V^{(0,1)}$ bezeichnen. Die Elemente des holomorphen Unterbündels $V^{(1,0)}$ sind von der Form

$$x - iJx \quad x \in TX, \quad (3.3.8)$$

die im anti-holomorphen Bündel $V^{(0,1)}$ dagegen von der Form

$$x + iJx \quad x \in TX. \quad (3.3.9)$$

Wir haben die beiden Projektionen:

$$\pi^{(1,0)} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{(0,1)} \quad (3.3.10)$$

$$\pi^{(0,1)} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{(1,0)} \quad (3.3.11)$$

Weiter bezeichne $W = TM \subset TX$ das Tangentialbündel an M und

$$W^{\mathbb{C}} = W \otimes \mathbb{C} \subset V^{\mathbb{C}} \quad (3.3.12)$$

seine Komplexifizierung. Wir betrachten die Schnitte mit dem holomorphen bzw. antiholomorphen Unterbündel

$$W^{(1,0)} = W^{\mathbb{C}} \cap V^{(1,0)} \quad (3.3.13)$$

und

$$W^{(0,1)} = W^{\mathbb{C}} \cap V^{(0,1)}. \quad (3.3.14)$$

Mit s_i bezeichnen wir Schnitte im Bündel $W^{\mathbb{C}}$.

Zuvor haben wir komplexe Punkte gezählt, indem wir Nullstellen von bestimmten Vektorfeldern gezählt haben. Leider konnte diese Art zu zählen

nicht zwischen holomorphen und anti-holomorphen Punkten unterscheiden. Nun nutzen wir Schnitte im Determinantenbündel wiederum dazu, komplexe Punkte zu zählen, wobei dieses Mal die Orientierung eine entscheidende Rolle spielen wird. Wir folgen dabei im Wesentlichen den Überlegungen aus [Web86].

Wiederum stellen wir zu Beginn einige lokale Überlegungen an, um zu verstehen, wie Schnitte im Determinantenbündel $W^{\mathbb{C}} \wedge W^{\mathbb{C}}$ komplexe Punkte erkennen können.

Sei p_0 ein komplexer Punkt von M und $s_1, s_2 \in W^{\mathbb{C}}$ Schnitte in einer Umgebung um p_0 , so dass $s_1 \wedge s_2 \neq 0$. Wie nehmen an, dass $s_1(p) \in W^{(1,0)}$ und $s_2(p) \in W^{(0,1)}$ gilt.

Außerhalb von komplexen Punkten ist

$$\pi^{(1,0)}|_{W^{\mathbb{C}}} : W^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{(1,0)} \quad (3.3.15)$$

ein Isomorphismus von Vektorbündeln. Denn ist $v + iw \in W^{\mathbb{C}}$ so ist

$$\pi^{(1,0)}(v + iw) = \frac{1}{2}(v - Jw), \quad (3.3.16)$$

wobei wir die Identifikation $TX \cong V^{(1,0)}$ verwendet haben. Damit folgt, dass $\pi^{(1,0)}(v + iw) = 0$ dann und nur dann falls $v = Jw$, also falls p ein komplexer Punkt ist. Da $s_1 \wedge s_2$ per Definition nirgends verschwindet, kann $p \in M$ nur dann Nullstelle von $\pi^{(1,0)}s_1 \wedge \pi^{(1,0)}s_2$ sein, falls p ein komplexer Punkt von M ist.

Nach [Web86] gilt dann am Punkt p_0 :

$$\text{ind}_p(\pi^{(1,0)}s_1 \wedge \pi^{(1,0)}s_2) = -\text{ind}(p) \quad (3.3.17)$$

falls p holomorph ist, und

$$\text{ind}_p(\pi^{(1,0)}s_1 \wedge \pi^{(1,0)}s_2) = +\text{ind}(p) \quad (3.3.18)$$

falls p anti-holomorph ist.

Der Index der Nullstelle von $\pi^{(1,0)}s_1 \wedge \pi^{(1,0)}s_2$ entspricht also genau dem Index des komplexen Punktes mit Vorzeichen.

Wie zuvor führt das zu einer globalen Aussage: Sind $s_1, s_2 \in W^{\mathbb{C}}$ zwei Vektorfelder, so dass

$$(i) \quad s_1 \wedge s_2 \neq 0$$

(ii) An komplexen Punkten von M gilt $s_1 \in W^{(1,0)}$ und $s_2 \in W^{(0,1)}$ oder umgekehrt,

dann entspricht die Differenz der Indizes $P - Q$ der komplexen Punkte der Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit) des Schnittes (s.a. [Hai07])

$$s_1 \wedge s_2 \in W^{\mathbb{C}} \wedge W^{\mathbb{C}} \quad (3.3.19)$$

Ist M ein minimaler Annulus, so ist die globale Konstruktion von s_1, s_2 unproblematisch. Ist M durch eine Abbildung $f : A \rightarrow X$ parametrisiert, so wählen wir

$$s_1 = df(\partial_r - i\partial_\phi) \quad (3.3.20)$$

$$s_2 = df(\partial_r + i\partial_\phi) \quad (3.3.21)$$

wobei (r, ϕ) Polarkoordinaten auf A sind und $\partial_r, \partial_\phi$ die zugehörigen Vektorfelder. Dann gilt

$$s_1 \wedge s_2 = 2i\partial_x \wedge \partial_y \neq 0 \quad (3.3.22)$$

Offenbar ist in einem komplexen Punkt p die Bedingung $s_1(p) \in W^{(1,0)}$ und $s_2(p) \in W^{(0,1)}$ erfüllt.

Für eine geschlossene Minimalfläche $M \subset X$, die nicht überall holomorph oder anti-holomorph ist, gilt folglich:

$$P - Q = c_1(X)[M] \quad (3.3.23)$$

Wir bemerken noch, dass auch für andere Definitionsbereiche obige Diskussion durchgeführt werden kann. Es müssen dann jedoch Nullstellen von

$s_1 \wedge s_2$ zugelassen werden, deren Beitrag in der Rechnung als relative Chern-Klasse der Minimalfläche auftaucht.

In jedem Fall stellen wir fest, dass sich sowohl Summe $P + Q$ als auch Differenz $P - Q$ durch die Anzahl von Nullstellen bestimmter Vektorfelder ausdrücken lässt. Nullstellen dieser Vektorfelder entsprechen komplexen Punkten. Solange also keine komplexen Punkte am Rand der Minimalfläche auftauchen, muss die Anzahl der komplexen Punkte von M unter stetigen Deformationen invariant bleiben. Wir werden dieses Ergebnis im letzten Abschnitt des Kapitels nochmal detailliert ausführen und formulieren.

3.4 Lagrange Punkte

Ähnlich wie im Fall von komplexen Punkten möchten wir auch eine Kontrolle über die Anzahl der Lagrange Punkte auf einer Minimalfläche in einer Kähler-Mannigfaltigkeit erhalten. Tatsächlich benötigen wir Bedingungen, die sicherstellen, dass eine Minimalfläche symplektisch ist. Mit Hilfe des Maximumsprinzips lässt sich zeigen, dass auch Lagrange Punkte nur über dem Rand entstehen können.

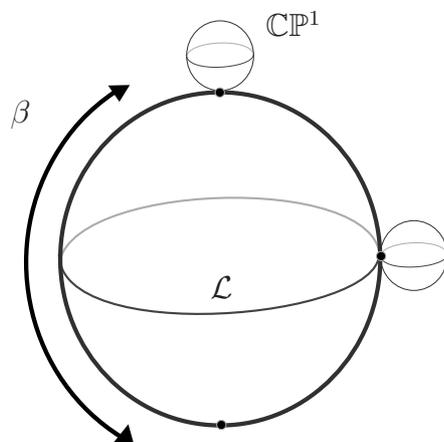
Im folgenden sei X eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit Kählerform ω . Weiter sei M eine Minimalfläche in X , möglicherweise mit Rand. Bezeichnen wir mit ds^2 die Metrik auf X , so lässt sich die zurückgezogene Metrik auf M als Form schreiben:

$$ds_M^2 = \phi \wedge \bar{\phi} \tag{3.4.1}$$

Sei $p \in M$ ein Punkt auf der Minimalfläche. In der Nähe von p wählen wir wie in [CW83] bzw. [Wol89] einen unitären Korahmen μ_1, μ_2 , so dass

$$\mu_1 = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \phi \quad \mu_2 = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \bar{\phi} \tag{3.4.2}$$

Die so definierte Funktion β ist auf ganz M wohldefiniert, überall stetig und glatt außerhalb von komplexen Punkten. Die geometrische Bedeutung

Abbildung 3.1: Die Grassmannsche $G(2, 4) \cong S^2 \times S^2$

von β wird klar aus (2.15) in [CW83]:

$$\omega = \frac{i}{2} \cos \beta \phi \wedge \bar{\phi} \quad (3.4.3)$$

Mit anderen Worten: β misst eine Art Lagrange Winkel, d.h. die Abweichung der Tangentialebene $T_p M$ von den Lagrange Ebenen in $T_p X$. Betrachten wir die Grassmannsche $G(2, 4)$ der orientierten Ebenen in $T_p X$, so können wir β auch als einen Parameter auf der Grassmannschen $G(2, 4)$ aller orientierten Ebenen in \mathbb{R}^4 auffassen (s. Abbildung 3.4) Für Lagrange Tangentialebenen ist $\cos \beta = 0$, an komplexen Punkten gilt $\cos \beta = \pm 1$.

Aus (3.4.2) folgt die wichtige Gleichung:

$$\sin \frac{\beta}{2} \mu_1 - \cos \frac{\beta}{2} \mu_2 = 0 \quad (3.4.4)$$

Um das Maximumsprinzip auf β anwenden zu können, berechnen wir zunächst $\partial \bar{\partial} \beta$ außerhalb der komplexen Punkte von M . Da M Minimalfläche ist, gilt nach [Wol89] für β :

$$\partial\bar{\partial}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\partial\beta \wedge \bar{\partial}\beta - \frac{i}{2}\sin\beta Ric \quad (3.4.5)$$

Mit $\partial\bar{\partial}\beta = \frac{1}{4}\Delta\beta\phi \wedge \bar{\phi}$, erhalten wir

$$\Delta\beta\phi \wedge \bar{\phi} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}|\nabla\beta|^2\phi \wedge \bar{\phi} - 2i\sin\beta Ric \quad (3.4.6)$$

Wir verwenden

$$\Delta\cos\beta = -\sin\beta\Delta\beta - \cos\beta|\nabla\beta|^2 \quad (3.4.7)$$

und erhalten wie in [CT97]:

$$\Delta\cos\beta\phi \wedge \bar{\phi} = -2\cos\beta|\nabla\beta|^2\phi \wedge \bar{\phi} - 2i\sin^2\beta Ric \quad (3.4.8)$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass X Ricci-flach ist. Dann ist $Ric = 0$ und (3.4.8) wird vereinfacht zu:

$$\Delta\cos\beta = -2\cos\beta|\nabla\beta|^2 \quad (3.4.9)$$

wobei $-\Delta$ der Laplace-Beltrami Operator auf M ist. Nun sind wir in der Lage, mit Hilfe des Maximum-Prinzips Aussagen über die Extremwerte von β zu treffen.

Wir nehmen an, dass M keine anti-holomorphen Punkte hat. Dann ist $0 \leq \beta < \pi$ überall. Außerhalb von $\{0, \pi\}$, d.h. außerhalb der komplexen Punkte, ist β eine glatte Funktion.

Angenommen, $\cos\beta$ wäre nicht konstant und hätte ein Minimum an einem inneren Punkt $p_0 \in M$, $p_0 \notin \partial M$. Wir nehmen an, dass p_0 kein komplexer Punkt ist. Dann gilt in p_0 :

$$\nabla\beta = 0 \quad (3.4.10)$$

$$\Rightarrow 0 = -2\cos\beta|\nabla\beta|^2 = \Delta\cos\beta \quad (3.4.11)$$

In jeder Umgebung U_ϵ von p_0 gibt es ein q so dass

$$\Delta\cos\beta(q) > 0 \quad (3.4.12)$$

Angenommen, das wäre nicht richtig. Dann gäbe es U_ϵ so dass $\Delta \cos \beta \leq 0$ auf ganz U_ϵ . Dann ist aber $\cos \beta$ auf U_ϵ superharmonisch und kann kein Minimum in p haben. Da wir $\cos \beta$ als nicht konstant vorausgesetzt haben, folgt, dass in q :

$$-2 \cos \beta(q) |\nabla \beta(q)|^2 > 0 \quad (3.4.13)$$

Also ist $\cos \beta(q) < 0$ und daher

$$\cos \beta(p_0) \leq 0 \quad (3.4.14)$$

Damit haben wir gezeigt:

Proposition 3.12. *Sei M eine Minimalfläche in einer Ricci-flachen Kähler-Mannigfaltigkeit X . Falls M keine anti-holomorphen Punkte hat, so gilt an einem inneren Minimum von $\cos \beta$:*

$$\cos \beta(p_0) \leq 0 \quad (3.4.15)$$

Für eine Minimalfläche M mit Rand ohne anti-holomorphe Punkte gibt es also nur folgende Möglichkeiten:

- (i) $\cos \beta$ ist konstant.
- (ii) das Minimum von $\cos \beta$ liegt auf dem Rand von M .
- (iii) M hat Lagrange Punkte (und das Minimum von $\cos \beta$ liegt im Inneren und ist < 0).

Hat M überhaupt keine komplexen Punkte, so kann $\cos \beta$ kein Minimum im Inneren haben und mit derselben Argumentation kein Maximum. Falls M kompakt ist, so folgt:

Proposition 3.13. *Sei M eine kompakte minimale Fläche in einer Ricci-flachen Kähler-Mannigfaltigkeit der reellen Dimension 4. Falls M total reell ist, so ist $\cos \beta$ konstant.*

Ist M nicht kompakt, so liegen Minimum und Maximum von $\cos \beta$ auf dem Rand.

Proposition 3.14. *Sei M eine verzweigte minimale Immersion mit Rand in einer Ricci-flachen Kähler-Mannigfaltigkeit. Falls M keine holomorphen Punkte hat und am Rand symplektisch ist, so ist M überall symplektisch.*

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch (vgl. [Wol89])

Proposition 3.15. *Sei M eine verzweigte minimale Immersion mit Rand in einer Ricci-flachen Kähler-Mannigfaltigkeit. Falls M total reell ist und am Rand Lagrange, so ist M überall Lagrange.*

3.5 Anwendungen für Familien

Sei nun M_t eine C^k -glatte Familie von Minimalflächen mit Rand, $k > 5$. Falls für alle t keine komplexen Punkte auf dem Rand von M_t liegen, gibt es eine C^k glatte Familie von Vektorfeldern v_t entlang M_t , so dass

- (i) Die Nullstellen von v_t liegen außerhalb der komplexen Punkte von M_t
- (ii) $v_t|_{\partial M_t} \neq 0$.

Die Summe der Indizes der Nullstellen eines Vektorfeldes entlang einer orientierten Fläche, welches auf dem Rand nirgends verschwindet, ist eine topologische Invariante:

Lemma 3.16. *Sei M eine orientierte Fläche mit Rand, v_t , $0 \leq t \leq 1$ eine C^k -glatte Familie von Vektorfeldern auf M mit $v_t|_{\partial M} \neq 0$, so dass für $t = 0, 1$ alle Nullstellen von v_t isoliert liegen.*

Dann gilt

$$\sum_{p \in \{v_0=0\}} \text{ind}_p(v_0) = \sum_{p \in \{v_1=0\}} \text{ind}_p(v_1) \quad (3.5.1)$$

An einer isolierten Nullstelle ist der Index der Nullstelle dabei als Windungszahl des Vektorfeldes über einer kleinen einfach geschlossenen Kurve um die Nullstelle zu verstehen.

Aufgrund der Bedingungen haben somit sowohl v_t also auch $\pi_N Jv_t$ keine Nullstellen auf ∂M . Aus den Überlegungen in Abschnitt 3.3 folgt, dass die Summe der komplexen Punkte auf M invariant ist.

Proposition 3.17. *Sei $M_t \in X$ eine C^k -glatte Familie von Minimalflächen mit Rand. Falls auf ∂M keine komplexen Punkte von M liegen, so ist $P + Q$ konstant.*

Ähnlich können wir für im Fall der Differenz der holomorphen und anti-holomorphen Punkte $P - Q$ argumentieren. Auch hier kommt es auf die Wahl der richtigen Vektorfelder an und auf die Tatsache, dass die Anzahl der Nullstellen konstant bleibt - vorausgesetzt, es gibt keine Nullstellen auf dem Rand.

Betrachten wir nun wiederum eine Familie M_t von Minimalflächen, gemeinsam mit einer Familie von Vektorfeldern s_1^t, s_2^t , die obige Bedingungen erfüllen. Solange M_t keine komplexen Punkte auf dem Rand hat, können wir s_1, s_2 glatt von t abhängig wählen, so dass $s_1 \wedge s_2$ keine Nullstellen auf dem Rand hat. Damit kann die Gesamtsumme der Nullstellen von $\pi^{(1,0)} s_1 \wedge \pi^{(1,0)} s_2$ sich lediglich ändern, falls Nullstellen von $\pi^{(1,0)} s_1 \wedge \pi^{(1,0)} s_2$ auf ∂M auftauchen.

Es folgt:

Proposition 3.18. *Sei $M_t \in X$ eine C^k -glatte Familie von Minimalflächen mit Rand. Falls für alle t auf ∂M_t keine komplexen Punkte von M_t liegen, so ist $P - Q$ konstant.*

und somit, indem wir die beiden Propositionen kombinieren:

Korollar 3.19. *Sei $M_t \in X$ eine C^k -glatte Familie von Minimalflächen mit Rand. Falls für alle t auf ∂M_t keine komplexen Punkte von M_t liegen, so ist die Anzahl der holomorphen und die Anzahl der anti-holomorphen Punkte konstant.*

Wir verwenden nun die Ergebnisse über Lagrange Punkte auf Minimalflächen um zu folgendem Resultat zu gelangen:

Proposition 3.20. *Sei M_t eine C^k -glatte Familie von Minimalflächen. Falls M_0 symplektisch und am Rand von M_t keine Lagrange Punkte liegen, so sind alle M_t symplektisch.*

Beweis. Falls keine Lagrange Punkte am Rand auftauchen, entstehen erst recht keine anti-holomorphen Punkte am Rand. Dann können aber nach Korollar 3.19 auch keine anti-holomorphen Punkte im Inneren entstehen. Lagrange Punkte im Inneren können nicht spontan entstehen. Dies sieht man wie folgt: Nehmen wir an für $t = t_0$ würde das erste Mal ein Lagrange Punkt in M_{t_0} auftauchen. Dann sind alle M_t für $t < t_0$ symplektisch. Für irgendein $t < t_0$ gäbe es dann aber ein $p \in M_t$ für das $\cos \beta(p)$ ein Minimum annimmt. Da für dieses t aber M_t symplektisch ist, gilt gleichzeitig $\cos \beta(p) > 0$, ein Widerspruch zu Proposition 3.12. \square

3.6 Indextheorie für Minimalflächen

Im Folgenden möchten wir Familien von Randdaten und dazugehörige Familien von Minimalflächen betrachten. Aber selbst wenn wir zu gegebenen Randdaten die Existenz von Minimalflächen sicherstellen können, ist es äußerst schwierig Eindeutigkeit zu zeigen. Das führt nun zu gewissen Komplikationen, schließlich wollen wir zu einer gegebenen glatten Familie Γ_t von Randdaten auch eine glatte Familie von Minimalflächen erhalten. Ohne eine genauere Untersuchung ist das aber wegen der fehlenden Eindeutigkeit nicht zu garantieren. Wir müssen daher mehr über die Struktur des Modulraums aller Minimalflächen erfahren.

Mit dieser Problematik haben sich besonders Böhme und Tromba in [BT81] beschäftigt. Sie zeigen das folgende Theorem im \mathbb{R}^n (4.14,[BT81]):

Theorem 3.21. *Für eine offene, dichte Menge $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ von Randbedingungen ist die Menge der Minimalflächen die von $\alpha \in \hat{\mathcal{A}}$ berandet wird eine endliche und "nicht-degenerierte" Menge. Diese Minimalflächen sind stabil unter Perturbationen von α . Falls $n > 3$, so sind die von α berandeten Minimalflächen*

immersiert bis auf den Rand. Falls $n = 3$, so existieren höchstens einfache Verzweigungspunkte im Inneren.

Wir wollen die Vorgehensweise in [BT81] erläutern und zeigen, warum die Ergebnisse auch in unserer Situation angewendet werden können.

Für eine differenzierbare Einbettung $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(S^1) = \Gamma$ versteht man unter einer Lösung des Plateau-Problems eine Abbildung $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der abgeschlossenen Einheitskreis mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\Delta f = 0$
- (ii) f ist konform, d.h. $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = 0$ und $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|^2$.
- (iii) $f|_{S^1} : S^1 \rightarrow \Gamma$ ist ein Homöomorphismus.

Es handelt sich also um eine harmonische, konforme Abbildung, die auf dem Rand ein Homöomorphismus ist (s.a. Kapitel 3). Anstatt zu einer festen Randkurve Γ zu versuchen, die Menge aller Minimalflächen mit Rand Γ zu verstehen, betrachten wir eine große Menge von Randbedingungen gleichzeitig. Durch geschickte Wahl von Regularitätsbedingungen an die Randkurven läßt sich so der Modulraum von minimalen Scheiben besser verstehen. Dazu bezeichnen wir für genügend große $r, s \in \mathbb{N}$ mit

$$A = \{ \alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \alpha \in H^r(S^1, \mathbb{R}^n), \alpha \text{ ist eine Einbettung und } \text{tc}(\alpha) < \pi(s-2) \} \quad (3.6.1)$$

$$\mathcal{D} = \{ u : S^1 \rightarrow S^1 \mid \deg u = 1 \text{ und } u \in H^s(S^1, \mathbb{C}) \} \quad (3.6.2)$$

Dann stellt die Menge A geschlossene Kurven in \mathbb{R}^n dar und wir können \mathcal{D} als Menge von Reparametrisierungen verstehen. Betrachten wir das Bündel $A \times \mathcal{D} \rightarrow A$, so gehört zu einem Paar (α, u) eine harmonische Abbildung $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diese ist eindeutig durch die Bedingungen

$$f|_{\partial D} = \alpha \circ u \quad (3.6.3)$$

bestimmt. Eine Minimalfläche mit Rand $\Gamma = \alpha(S^1)$ kann somit als Element in $A \times \mathcal{D}$, bzw. als Element von $\pi^{-1}(\alpha)$ aufgefasst werden, wobei wir mit $\pi : A \times \mathcal{D} \rightarrow A$ die kanonische Projektion bezeichnen.

Anstatt nur für eine feste Randkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ nach Lösungen für das Minimalflächen-Problem zu suchen, verwenden Böhme und Tromba in ihrer Arbeit [BT81] einen anderen Ansatz: Sie untersuchen zunächst Eigenschaften der Menge aller (verzweigten) Minimalflächen als Teilmenge der harmonischen Abbildungen bzw. als Teilmenge von $A \times \mathcal{D}$.

Im Anschluss lassen sich dann Aussagen über Minimalflächen mit vorgegebenen Randbedingungen $\Gamma = \alpha(S^1)$ machen.

Dabei stellen sie einen Zusammenhang zwischen Verzweigungspunkten auf einer Minimalfläche $f \in A \times \mathcal{D}$ und dem Index der Projektions-Abbildung π her.

Wir sagen, eine Minimalfläche ist vom Verzweigungstyp (γ, ν) ,

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$$

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_q)$$

mit $\lambda_i, \nu_i \geq 0$, falls f genau p unterschiedliche Verzweigungspunkte z_1, \dots, z_p der Ordnung $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ und genau q Verzweigungspunkte ζ_1, \dots, ζ_q der Ordnung ν_1, \dots, ν_q auf dem Rand besitzt.

Uns interessiert der Raum aller Minimalflächen $\mathcal{M} \subset \eta$. Betrachtet man nun Minimalflächen vom Verzweigungstyp (λ, ν) , so erhält man Unterräume $\mathcal{M}_\nu^\lambda \subset \mathcal{M}$.

Die zentrale Aussage von [BT81] ist nun

Theorem 3.22 (4.10 in [BT81]). *Die Einschränkung $\pi^\lambda = \pi|_{\mathcal{M}_0^\lambda}$ ist Fredholm vom Index*

$$I(\lambda) = 2(2 - n)|\lambda| + 2p + 3 \tag{3.6.4}$$

mit $|\lambda| = \sum \lambda_i$.

Weiter gilt

Theorem 3.23 (3.39 in [BT81]). *Sei $\nu \neq 0$. Für eine Minimalfläche $x \in \mathcal{M}_\nu^\lambda$ existiert lokal eine Untermannigfaltigkeit \mathcal{W}_ν^λ von η , so dass lokal $\mathcal{M}_\nu^\lambda \subset \mathcal{W}_\nu^\lambda$.*

Die Einschränkung π_ν^λ von π auf \mathcal{W}_ν^λ ist Fredholm vom Index

$$I(\lambda, \mu) = 2(2 - n) |\lambda| + (2 - n) |\nu| + 2p + q + 3 \quad (3.6.5)$$

Betrachten wir zunächst das Bündel η . Zu diesem existiert eine Stratifizierung in Untermannigfaltigkeiten η_ν^λ . Ist $(\alpha, u) \in \eta$, so ist $(\alpha, u) \in \eta_\nu^\lambda$ genau dann, wenn die zugehörige harmonische Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f|_{\partial D} = \alpha \circ u$ vom Verzweigungstyp (λ, ν) ist.

Unter geeigneten Regularitätsbedingungen ist nun η_ν^λ tatsächlich eine Untermannigfaltigkeit von η . Ihre Kodimension ist $2n |\lambda| + (n + 1) |\nu| - 2p - q$ (s. Theorem 2.14 in [BT81]).

Sei $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir mit $\eta(\alpha)$ die Menge aller Abbildungen $H^s(S^1, \Gamma^\alpha)$ mit $\Gamma^\alpha = \alpha(S^1)$. In [Tro77] wird gezeigt, dass es ein C^{r-s-1} -glattes Vektorfeld X auf $\eta(\alpha)$ existiert, dessen Nullstellen genau den Minimalflächen (in einem etwas allgemeineren Sinne) entsprechen.

Man kann nun X auf ganz η definieren, indem wir η mit $\bigcup_\alpha \eta(\alpha)$ identifizieren. Nehmen wir eine Minimalfläche $x \in \eta(\alpha)$, z.B. $x \in \mathcal{M}_\nu^\lambda$. Dort ist per Definition $X^\alpha(x) = X(x) = 0$ und die Fréchet-Ableitung bildet $T_x \eta(\alpha)$ auf sich selbst ab.

Die Kodimension des Bildes der Fréchet-Ableitung $X_*(x)$ von X an der Stelle x ist genau $2 |\lambda| + |\nu| + 3$, wobei wir $X_*(x)$ als Abbildung $T_x \eta \rightarrow T_x \eta(\alpha)$ auffassen. (Theorem 1 in [Tro77])

Schränkt man X auf die Untermannigfaltigkeiten vom Verzweigungstyp (λ, ν) ein, so ist das Bild von X_* in $T_x \eta(\alpha)$ gar von Kodimension $4 |\lambda| + 3 |\nu| + 3$.

Das orthogonale Komplement von X_* hat eine geometrische Bedeutung. Böhme und Tromba zeigen, dass es sich um so genannte "erzwungene Jacobi-Felder" handelt. Ist $x = \alpha \circ u$ eine Minimalfläche vom Verzweigungstyp (λ, ν) , so ist

$$J(x) := \{k : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \Delta k = 0, k = \operatorname{re} K\} \quad (3.6.6)$$

wobei $K = i\omega(z)F(z)$ mit $F = \frac{\partial x}{\partial z}$ und einer meromorphen Funktion ω , die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) $\operatorname{im} \omega = 0$ auf ∂D
- (ii) ω hat Pole in $z_1, \dots, z_p \in D$ und $\zeta_q, \dots, \zeta_q \in \partial D$ mit maximaler Ordnung λ_j bzw. ν_j .
- (iii) Falls für alle j gilt $z_j \neq 0$, so kann $\omega(z)$ einen Pol der Ordnung ≤ 1 in 0 haben.
- (iv) Falls für ein j gilt $z_j = 0$, so kann $\omega(z)$ einen Pol der Ordnung $\leq \lambda_j + 1$ in 0 haben.

Es gilt:

Theorem 3.24 (Theorem 6.7 in [BT81]). *Sei $(\alpha, u) \in \mathcal{M}_\nu^\lambda$. Dann stimmt das $H^{1/2}$ -Komplement von $X_*(\alpha_u) : T_{(\alpha, u)}\eta \rightarrow T_u\eta(\alpha)$ mit den erzwungenen Jacobi-Feldern $J(x)$ überein.*

Die Kodimension von X_* entspricht also der Dimension von $J(x)$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass

$$\dim J(x) = 2|\lambda| + |\nu| + 3 \quad (3.6.7)$$

Die große Kodimension von X stellt eine gewisse Schwierigkeit dar. Wir wollen die Nullstellenmenge von X bestimmen. Wäre nun X_* surjektiv, so könnten wir schließen, dass diese eine Untermannigfaltigkeit von η_ν^λ wäre.

Um dieses Problem zu lösen, betrachten Böhme und Tromba daher den Operator k , der aus X und anschließender orthogonaler Projektion auf das Bild von $X_*(x)|_{T_x\eta_\nu^\lambda}$ zusammengesetzt ist. k ist nach Konstruktion in einer Umgebung von x surjektiv. In dieser Umgebung können wir nun die Nullstellenmenge von k betrachten.

Offenbar ist jede Minimalfläche Nullstelle von k . Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Nennen wir also die lokale Nullstellenmenge \mathcal{W}_ν^λ , so gilt (lokal) $\mathcal{M}_\nu^\lambda \subset \mathcal{W}_\nu^\lambda$. Außerdem ist nun \mathcal{W}_ν^λ eine Untermannigfaltigkeit von η_ν^λ . Die Projektionsabbildung $\pi_\nu^\lambda = \pi|_{\mathcal{W}_\nu^\lambda}$ ist dann Fredholm vom Index (Theorem 3.39 in [BT81])

$$\text{ind } \pi_\nu^\lambda = 2|\lambda|(2-n) + |\nu|(2-n) + 2p + q + 3 \quad (3.6.8)$$

Es stellt sich heraus, dass für $\nu = 0$ gilt: $\mathcal{M}_0^\lambda = \mathcal{W}_0^\lambda$. Damit folgt dann das für uns entscheidende Ergebnis:

Theorem 3.25 (Theorem 4.12 in [BT81]). *Für $n > 3$ gilt $\pi(\bigcup_{|\lambda|+|\nu|\geq 0} \mathcal{M}_\nu^\lambda)$ ist eine abgeschlossene, nirgends dichte Teilmenge von A .*

Kapitel 4

Füllungen mit minimalen Annuli

4.1 Minimale Füllungen

Seien $\phi_i : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow X$, $i = 0, 1$ zwei Einbettungen des Zylinders in eine Ricci-flache Kähler-Mannigfaltigkeit X . Mit L_i bezeichnen wir das Bild von $S^1 \times \mathbb{R}$ unter ϕ_i . Die L_i sind also Untermannigfaltigkeiten in X .

Definition 4.1. Eine (C^k) -Füllung mit minimalen Annuli zwischen L_0, L_1 ist eine C^k -glatte Familie von C^k -eingebetteten minimalen Annuli $A_t \subset X$ für $t \in \mathbb{R}$, so dass:

- (i) Für $t \neq t'$ gilt $A_t \cap A_{t'} = \emptyset$.
- (ii) $\bigcup_t \Gamma_t^i = L_i$

wobei Γ_t^i , $i = 0, 1$ die beiden zu S^1 homöomorphen Randkomponenten von A_t bezeichnet $\partial A_t = \Gamma_t^0 \cup \Gamma_t^1$.

Im folgenden werden wir stets voraussetzen, dass alle Abbildungen mindestens C^k -glatt, $k > 5$, sind, sofern nichts anderes verlangt wird.

Wir betrachten nun wieder das Kotangentialbündel

$$X = T^*(S^1 \times \mathbb{R}) \cong S^1 \times \mathbb{R}^3 \tag{4.1.1}$$

mit der kanonischen Kähler-Struktur. Seien (θ, t, x, y) Koordinaten auf X . Sei L_0 der Nullschnitt in X . Weiter bezeichnen wir mit F_t die Hyperflächen $S^1 \times \{t\} \times \mathbb{R}^2 \subset X$. Dann ist $F_t \cap L_0 = \gamma_t$ eine einfach geschlossene Kurve mit Parametrisierung

$$\gamma_t(\theta) = (\theta, t, 0, 0) \quad (4.1.2)$$

Wir wollen nun die Frage der Existenz minimaler Füllungen zwischen dem Nullschnitt und einer gegebenen Lagrangen Einbettung des Zylinders $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow T^*(S^1 \times \mathbb{R})$ untersuchen.

4.2 Existenz minimaler Füllungen

Unter gewissen geometrischen Voraussetzungen können wir dann die Existenz einer Füllung mit minimalen Annuli zwischen einem gegebenen Zylinder und dem Nullschnitt garantieren.

Wir betrachten die folgende Situation: $L \cong S^1 \times \mathbb{R}$ sei ein Lagranger Zylinder in $X = S^1 \times \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnen wir mit F_t die "Fasern"

$$F_t = \{(\theta, \tau, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^3 \mid \tau = t\} \quad (4.2.1)$$

und mit Γ_t den Schnitt von L mit F_t , d.h.

$$\Gamma_t = L \cap F_t. \quad (4.2.2)$$

Sei $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow X$ eine Parametrisierung von L . Mit γ_t bezeichnen wir die Kurven

$$\gamma_t = \{(\theta, \tau, 0, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}^3 \mid \tau = t\} \quad (4.2.3)$$

d.h. die Schnitte $L_0 \cap F_t$.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass L die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Γ_t ist eine einfach geschlossene Kurve in F_t mit $\text{tc}(\Gamma_t) \leq 2\pi$
- (ii) $\phi(\theta, t) = (\theta, t, 1, 0)$ für $|t| > C$

(iii) $L \cap L_0 = \emptyset$

Theorem 4.2 (Theorem B). *Sei $L \subset X$ ein Lagranger Zylinder, der obige Bedingungen erfüllt. Falls für jedes t eine nichtkonstante, subharmonische Funktion*

$$u_t : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.2.4)$$

existiert, so dass

$$u_t|_{\Gamma} = u_t|_{L_0} = \text{const} \quad (4.2.5)$$

so gibt es eine Füllung mit minimalen Annuli zwischen L und dem Nullschnitt L_0 .

Wir konstruieren zunächst eine passende Familie von minimalen Annuli mit Rand auf dem Zylinder bzw. auf dem Nullschnitt. Entscheidend ist hierbei die Arbeit von Böhme-Tromba [BT81] bzw Thiel [Thi85]. Dort wird gezeigt, dass zu generischen Randdaten immersierte Minimalflächen existieren und diese stabil unter Perturbationen sind. Wir haben einige Aspekte dieser Arbeit im Abschnitt 3.6 erläutert.

Betrachte die Menge aller minimalen immersiorten Annuli \mathcal{M} mit zugehörigen Randdaten

$$\mathcal{A} = \{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_i \in H^r(S^1, X) \text{ ist eine Immersion für } i = 1, 2; \\ \alpha_1, \alpha_2 \text{ sind disjunkt} \}$$

Sei $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ die Projektion von \mathcal{M} auf die Randdaten \mathcal{A} . Dann ist nach [Thi85]

Theorem 4.3. *Das Differential π_* der Projektion ist ein Fredholm-Operator vom Index 1. Die Menge der regulären Werte von π ist offen und dicht.*

Der Index 1 kommt von der Dimension der Menge der konformen Selbstabbildungen des Annulus auf sich selbst. Nehmen wir von nun an an, dass die Randdaten

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (4.2.6)$$

ein regulärer Wert von π sind.

Wir bezeichnen mit $\partial_+ A, \partial_- A$ die beiden Randkomponenten des Annulus $A = S^1 \times I$. Ist dann $f : A \rightarrow X$ ein minimaler Annulus mit Rand

$$f|_{\partial_+ A} = \alpha_1 \quad (4.2.7)$$

$$f|_{\partial_- A} = \alpha_2 \quad (4.2.8)$$

so ist $d\pi|_f$ eine surjektive Abbildung auf $T_{(\alpha)}\mathcal{A}$. Damit folgt, dass π in einer kleinen Umgebung in \mathcal{M} von f ein Diffeomorphismus auf die Randdaten ist.

Zunächst stellen wir fest: Für $|t| > C$ sind die von γ_t, Γ_t berandeten Minimalflächen A_t eindeutig bis auf Parametrisierung. Es gilt:

$$A_t = \{(\theta, t, x, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 1]\} \quad (4.2.9)$$

Für $|t| > C$ ist

$$\Gamma_t = \{(\theta, t, 1, 0) \mid 0 < \theta < 2\pi\} \quad (4.2.10)$$

Die konvexe Hülle von Γ_t, γ_t ist also gerade

$$\{(\theta, t, x, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 1]\} \quad (4.2.11)$$

Da jede Minimalfläche in der konvexen Hülle ihrer Randdaten (s. Proposition 3.1) enthalten ist, ist die von γ_t, Γ_t berandete Minimalfläche eindeutig und entspricht dem Annulus in (4.2.9).

Tatsächlich gilt:

Proposition 4.4. *Sei $\Gamma, \gamma \in A$ so dass $\text{tc}(\gamma) + \text{tc}(\Gamma) \leq 2\pi$. Dann ist (Γ, γ) ein regulärer Punkt von π . Insbesondere ist jede immersierte Minimalfläche mit Rand (Γ, γ) stabil unter Perturbationen des Randes.*

Beweis. Sei $0 < \rho < 1$ und

$$A_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho \leq |z| \leq 1\} \quad (4.2.12)$$

Um die Regularität unter π zu zeigen, müssen wir zeigen, dass für jede minimale Immersion $x : A_\rho \rightarrow X$ mit den gegebenen Randdaten (γ, Γ) und für ein harmonisches Vektorfeld h entlang x gilt:

Falls h tangential entlang Γ, γ ist und h infinitesimal konform ist, d.h.

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \quad (4.2.13)$$

so folgt, dass h überall tangential an x ist.

Nehmen wir an, das wäre nicht so. Dann gäbe es ein Jacobi-Feld der Form $u \cdot N$, wobei N ein normales Vektorfeld entlang M und u eine nicht-verschwindende glatte Funktion mit $u|_{\partial M} = 0$ wäre. Das würde bedeuten, dass M instabil ist.

Da $tc(\partial M) \leq 2\pi$ folgt aus Gauss-Bonnet, dass $-2\pi \leq \int_M K_M \leq 0$. Aus dieser Bedingung folgt aber mit [BdC76], dass M eine stabile Minimalfläche sein muss. Also kann es kein normales Jacobi-Feld geben und h ist überall tangential.

Folglich ist h ein erzwungenes Jacobi-Feld im Sinne von [BT81]. Damit folgt, dass die einzigen Perturbationen im Kern von π erzwungene Jacobi-Felder sind. Da die minimale Immersion x keine Verzweigungspunkte hat, ist $\dim \ker \pi_* = 1$ und somit muss π surjektiv sein wegen $\text{ind } \pi = 1$ \square

Bemerkung 4.5. Es ist nicht wahr, dass π generell keine kritischen Punkte besitzt. Die Regularität von π steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Stabilität von Minimalflächen. Stabile Minimalflächen sind immer auch reguläre Punkte von π . Eine nicht-stabile Minimalfläche dagegen kann kein regulärer Punkt von π sein. Hier gibt es im Kern von π zusätzliche Jacobi-Felder, außer den durch die Gruppe der konformen Reparametrisierungen erzwungenen.

Im Falle minimaler Scheiben folgt aus der Regularität der Randdaten nämlich, dass es nur endlich viele minimale Scheiben mit diesen Randdaten gibt. Andererseits konnten Lewy und Courant in [Cou50] mit Hilfe des Bridge-Principles Beispiele rektifizierbarer Jordankurven konstruieren, welche unendlich viele stabile minimale Scheiben beranden. Eine detaillierte Untersuchung findet sich in [MY82]. Derartige Randdaten können unmöglich reguläre Werte der Projektion sein.

Wir müssen noch zeigen, dass wir die Familie von Minimalflächen einge-

bettet und disjunkt konstruieren können, um Füllung mit minimalen Annuli zu erhalten.

Die Disjunktheit folgt sofort aus der Konstruktion: die Randdaten zu M_t sind komplett in der flachen Hyperfläche F_t enthalten, daher gilt auch $M_t \subset F_t$. Da alle F_t paarweise disjunkt folgt die Disjunktheit der Minimalflächen.

Die Eingebettetheit folgt aus der Existenz der Funktionen u_t . Alle Minimalflächen sind immersiert, aufgrund der Krümmungsbedingungen auf dem Rand und der Aussage von Proposition 3.6. Zunächst stellen wir fest, dass für Minimalflächen in $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ebenso wie für Minimalflächen in \mathbb{R}^3 keine Doppelpunkte im Inneren entstehen können. Ansonsten würde nämlich zunächst ein Berührungspunkt entstehen. Aufgrund des Maximum-Prinzips für Minimalflächen in \mathbb{R}^3 ist das jedoch ausgeschlossen.

Also muss ein Doppelpunkt am Rand auftauchen. Da aber $u_t = \text{const}$ auf dem Rand und $u_t|_{A_t} \leq \text{const}$ folgt, dass $u_t|_{A_t}$ ein lokales Minimum hätte. Dies widerspricht der Tatsache, dass es zu A_t eine harmonische Parametrisierung ϕ gibt, so dass $u_t \circ A_t$ subharmonisch ist.

Damit ist das Theorem 4.2 bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [BdC76] J. L. Barbosa and M. do Carmo, *On the size of a stable minimal surface in R^3* , Amer. J. Math. **98** (1976), no. 2, 515–528. MR MR0413172 (54 #1292) 67
- [BT81] R. Böhme and A. J. Tromba, *The index theorem for classical minimal surfaces*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 3, 447–499. MR MR621012 (83a:58031) 56, 57, 58, 59, 60, 61, 65, 67
- [CM06] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II, *Minimal submanifolds*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), no. 3, 353–395. MR MR2239032 (2007e:53071) 35, 36
- [Cou50] R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1950, Appendix by M. Schiffer. MR MR0036317 (12,90a) 67
- [CT97] J. Chen and G. Tian, *Minimal surfaces in Riemannian 4-manifolds*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 5, 873–916. MR MR1475549 (99m:53112) 52
- [CW83] Shiing Shen Chern and Jon Gordon Wolfson, *Minimal surfaces by moving frames*, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 1, 59–83. MR MR692106 (84i:53056) 50, 51
- [CZ01] Kai-Seng Chou and Xi-Ping Zhu, *The curve shortening problem*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. MR MR1888641 (2003e:53088) 28, 29

- [DHKW92] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab, *Minimal surfaces. II*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 296, Springer-Verlag, Berlin, 1992, Boundary regularity. MR MR1215268 (94c:49001b) 41
- [EP93] Yakov Eliashberg and Leonid Polterovich, *Unknottedness of Lagrangian surfaces in symplectic 4-manifolds*, Internat. Math. Res. Notices (1993), no. 11, 295–301. MR MR1248704 (94j:58061) 13
- [EP96] ———, *Local Lagrangian 2-knots are trivial*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), no. 1, 61–76. MR MR1405943 (97g:58055) 13, 16, 20, 29
- [EP97] ———, *The problem of Lagrangian knots in four-manifolds*, Geometric topology (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 313–327. MR MR1470735 (98k:58087) 13
- [EWW02] Tobias Ekholm, Brian White, and Daniel Wienholtz, *Embeddedness of minimal surfaces with total boundary curvature at most 4π* , Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 1, 209–234. MR MR1888799 (2003f:53010) 42
- [Hai07] Stefan Hainz, *Eine Riemannsche Betrachtung des Reeb-Flusses*, Bonner Mathematische Schriften, vol. 382, Universität Bonn, 2007. 49
- [HI06] R. Hind and A. Ivrii, *Isotopies of high genus lagrangian surfaces*, <http://www.citebase.org/cgi-bin/citations?id=oai:arXiv.org:math/0602475>, 2006. 14
- [Hir94] Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New York, 1994. MR MR1336822 (96c:57001) 6

LITERATURVERZEICHNIS

- [HT09] Stefan Hildebrandt and Anthony J. Tromba, *On the branch point index of minimal surfaces*, Arch. Math. (Basel) **92** (2009), no. 5, 493–500. MR MR2506950 (2010a:53013) 41, 42
- [MS98] Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. MR MR1698616 (2000g:53098) 1, 2, 4, 10
- [MW95] Mario J. Micallef and Brian White, *The structure of branch points in minimal surfaces and in pseudoholomorphic curves*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 1, 35–85. MR MR1314031 (96a:58063) 38
- [MY82] William W. Meeks, III and Shing Tung Yau, *The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness*, Math. Z. **179** (1982), no. 2, 151–168. MR MR645492 (83j:53060) 67
- [Oss86] Robert Osserman, *A survey of minimal surfaces*, second ed., Dover Publications Inc., New York, 1986. MR MR852409 (87j:53012) 35
- [Thi85] Ursula Thiel, *The index theorem for k -fold connected minimal surfaces*, Math. Ann. **270** (1985), no. 4, 489–501. MR MR776168 (86j:58031) 65
- [Tro77] A. J. Tromba, *On the number of simply connected minimal surfaces spanning a curve*, Mem. Amer. Math. Soc. **12** (1977), no. 194, v+121. MR MR0649458 (58 #31197) 59
- [Web84] S. M. Webster, *Minimal surfaces in a Kähler surface*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 463–470. MR MR788290 (86h:53064) 45, 46
- [Web85] ———, *The Euler and Pontrjagin numbers of an n -manifold in \mathbf{C}^n* , Comment. Math. Helv. **60** (1985), no. 2, 193–216. MR MR800003 (86m:32034) 46

- [Web86] ———, *On the relation between Chern and Pontrjagin numbers*, Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Maine, 1984), Contemp. Math., vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 135–143. MR MR833810 (88a:57047) 48
- [Wei71] Alan Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Advances in Math. **6** (1971), 329–346 (1971). MR MR0286137 (44 #3351) 10
- [Wol89] Jon G. Wolfson, *Minimal surfaces in Kähler surfaces and Ricci curvature*, J. Differential Geom. **29** (1989), no. 2, 281–294. MR MR982175 (90d:53073) 50, 51, 54