

# Diffusionsmodelle zur geomorphologischen Generalisierung und ihre Finite-Elemente-Diskretisierung

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades  
der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von  
Jens Vogelgesang  
aus  
Mülheim an der Ruhr

Bonn 2006

Angefertigt mit Genehmigung  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Bonn

1. Referent: Privat-Dozent Dr. C. Ebmeyer
2. Referent: Prof. Dr. J. Frehse

Tag der Promotion: 09.02.2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modellierung</b>	<b>5</b>
2.1	Einleitung und Motivation . . . . .	5
2.2	Das Total-Variations-Funktional und die nicht gewollte Konvexifizierung . . . . .	6
2.3	Problem der Generalisierung . . . . .	7
2.4	Die Perona-Malik-Gleichung und ihre verschiedenen Regularisierungen . . . . .	8
2.5	Die Modellgleichung . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Young'sche Maße und der Raum der beschränkten Variation</b>	<b>13</b>
3.1	Einleitung . . . . .	13
3.2	Young'sche Maße . . . . .	13
3.3	Maßwertige Lösungen . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Finite-Element-Approximation und Konvergenzraten</b>	<b>19</b>
4.1	Nichtdegeneriertes Beispielproblem . . . . .	19
4.2	CGFEM und Quasinormabschätzungen . . . . .	29
4.3	DGFEM für Quasilineare Gleichungen . . . . .	37
4.4	Modellproblem mit superlinearem Wachstum . . . . .	46
4.5	Das diskrete Modellproblem mit linearem Wachstum . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Anwendung und numerische Experimente</b>	<b>61</b>
5.1	Einleitung . . . . .	61
5.2	Numerische Experimente . . . . .	62
5.3	Topographische Kurven . . . . .	67
5.4	Anwendungen auf Höhenmodelle . . . . .	68
	<b>Notationen</b>	<b>74</b>
	<b>Literatur</b>	<b>74</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>80</b>
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>81</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Höhenmodell des Turtmantals . . . . .	2
5.1	Entrauschen eines Standardbildes. . . . .	63
5.2	Formgeneralisierung eines digitalen Höhenmodells. . . . .	64
5.3	Invarianz des Trägers – Der Einfluß der Randkrümmung für verschiedene Parameterwahl $(\mu, \lambda)$ . . . . .	65
5.4	Endliche Zeitextinktion und Abklingprofil für verschiedene Parameter $(\mu, \lambda)$ . . . . .	66
5.5	Geomorphologische Klassifizierung mit gebräuchlicher englischer Bezeichnung . . . . .	69
5.6	Formgeneralisierung des digitalen Höhenmodells des Bröltals. . . . .	71
5.7	Formgeneralisierung des digitalen Höhenmodells des Länderauschnitts Neuseeland. . . . .	72
5.8	Formgeneralisierung des digitalen Höhenmodells des Turtmantals. . . . .	73



# Kapitel 1

## Einleitung

1. In der vorliegenden Arbeit wird ein neues Diffusionsmodell zur Formgeneralisierung vorgeschlagen und betrachtet, welches einem nicht-monotonen Anfangs-Randwertproblem der folgenden Form entspricht: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Polygonebiet und  $T \in \mathbb{R}_+$ . Die Funktion  $u(x, t) : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  löse

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(\mathbf{q}(\nabla u)) &= 0 & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{q}(s) := \left( \frac{\lambda |s|^{2\delta} + \mu |s|^{3\delta+1}}{\lambda + |s|^{2(\delta+1)}} \right) s \quad \text{für } s \in \mathbb{R}^2$$

und freien Parametern  $\lambda, \mu > 0$  und  $\delta \in [0, 1]$ . Hier bezeichnet  $\mathbf{n}$  die äußere Normale an  $\partial\Omega$ . Dieses Problem entspricht einem stabilisierten nicht-monotonen Vorwärts-Rückwärts-Perona-Malik-Modell.

Die Verwendung von nicht-monotonen Diffusionsgleichungen zur Formgeneralisierung erweist sich als vorteilhaft, da wichtige geometrische Strukturen wie Krümmungsgrößen und Bruchkanten in der Anwendung erhalten bleiben, wohingegen unwesentliche Details verloren gehen und somit der erwünschte Prozess der Formgeneralisierung eintritt. Hier führt die künstliche Einführung der Zeit zur Schaffung einer neuen Skala der Generalisierung, die sich über die freien Parametern  $\lambda, \mu$  und  $\delta$  anwendungsspezifisch steuern läßt. In der Geomorphologie liefert dieser Prozess generalisierte Höhenmodelle und ermöglicht eine effektive geologische Klassifizierung anhand ihrer Krümmungsgrößen.

Motiviert wird die Verwendung nichtlinearer Diffusionsfilter in der Formgeneralisierung durch ihre erfolgreiche Anwendung in der Bildverarbeitung. Dort werden sie zum selektiven Glätten unter gleichzeitiger Kontrastverstärkung verwendet. Dieser Ansatz wurde in einer Pionierarbeit von P. Perona und J. Malik [45] als Skalenraum-Technik vorgeschlagen. Diese Gleichung hat einen Vorwärts-Rückwärts-Parabolischen Charakter und ist trotz ihrer erfolgreichen Anwendung ein schlecht gestelltes Problem für das noch kein Lösungsbegriff existiert. Die bekannteste Regularisierung der Perona-Malik-Gleichung geht auf F. Catté, P.L. Lions, J.M. Morel und T. Coll [17] zurück und besteht in einer Ortsfaltung des Gradienten in der Nichtlinearität.

Die mathematische Behandlung von Vorwärts-Rückwärts-Diffusionsgleichungen werden unter anderem in der Arbeit von D. Kinderlehrer und P. Pedregal [32] sowie S. Demoulini [23] als nichtkonvexes Minimierungsproblem und in M. Slemrod [50] als singulärer

Limes eines regularisierten Minimierungsproblems betrachtet. Beide Ansätze beruhen auf der Einführung von maßwertigen Lösungen, genauer, auf der Einführung von Lösungen im Sinne der Young'schen Maße. Das Konzept der Young'schen Maße zur Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs des Minimierungsproblems geht auf L.C. Young [59] zurück und wurde unter anderen durch L. Tartar [52] und J. Ball [9] auf nichtlineare Differentialgleichungen angewendet. Die Betrachtung von Young'schen Maßen spielt überdies auch in anderen Zusammenhängen eine Rolle, wie in den Materialwissenschaften (siehe z.B. [7] und [8]).

2. Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Entwicklung eines neuen mathematischen Modells der Formgeneralisierung, der Erarbeitung eines anwendungsorientierten Algorithmus, seiner numerische Analyse, und seiner Anwendung auf geologische Daten. Dabei bilden digitale Höhenmodelle (DHM), die in der englischsprachigen Literatur unter dem Namen DEM geführt werden, die Grundlage der Untersuchung und dienen als Anfangsdaten der vorgeschlagenen nichtlineare Diffusionsgleichung. Die Abbildung 1 zeigt ein solches Höhenmodell<sup>1</sup>, wobei die Färbung in Abhängigkeit von der Höhe  $u$  gewählt wurde.

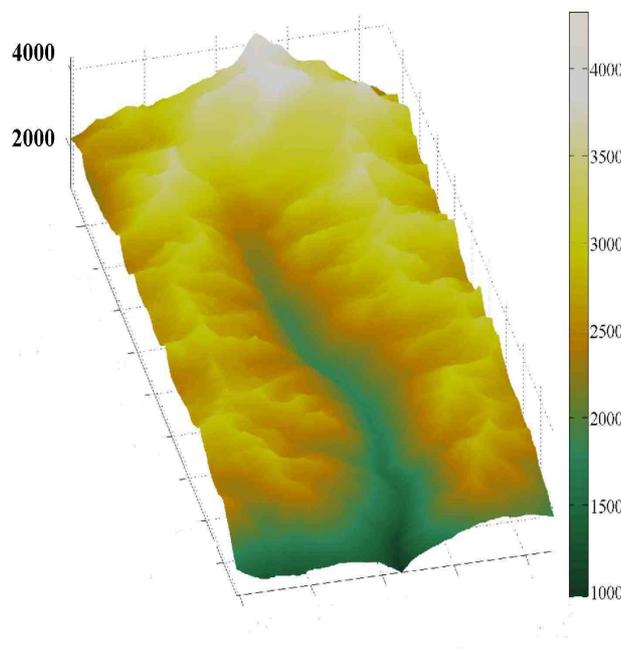


Abbildung 1.1: Höhenmodell des Turtmantals

Die Lösung  $u$  des neuen Modells der Formgeneralisierung soll durch eine geeignete Finite-Elemente-Lösung approximiert werden. Für den Fall  $\delta > 0$  wird es die Aufgabe sein, für die Approximation des nichtkonvexen Problems den a priori-Fehler des regulären Anteils der Lösung abzuschätzen. Zur Herleitung der Fehlerabschätzungen wird das konvexifizierte Problem betrachtet, welches in die Klasse der Probleme mit  $p$ -Struktur fällt. Wir betrachten konforme wie auch diskontinuierliche Finite Elemente und leiten Fehlerabschätzungen in Quasinormen der stückweis-definierten Funktionen her. Das Konzept der makroskopischen Konvergenz sichert dann die Konvergenz der Finiten-Elemente-Approximation des konvexifizierten Problems gegen eine Lösung des nichtkonvexen Problems.

Der für die Praxis relevanteste Fall,  $\delta = 0$ , soll mit  $P_1$ -Finiten-Elementen approximiert und gesondert betrachtet werden. Die anwendungsorientierte Aufgabe ist dann das Verfah-

<sup>1</sup>Meßdaten bereitgestellt durch das GRK 437

ren an künstlichen geometrischen Objekten und an tatsächlichen Höhenmodellen zu testen.

**3.** Wir werden also ein neues Modell zur Formgeneralisierung vorschlagen, numerisch analysieren und auf Höhenmodelle anwenden. Die Arbeit gliedert sich wie folgt.

Das zweite Kapitel dient der Einführung in die geomorphologische Formgeneralisierung und der Herleitung des neuen Modells. Als Motivation für die Benutzung nichtlinearer Diffusionsfilter dient uns ihre Anwendung in der Bildverarbeitung. Es werden zwei nichtlineare Diffusionsgleichungen beschrieben, deren Anwendung sich auf die Formgeneralisierung übertragen läßt. Die erste Gleichung, der sogenannte Total-Variationsfluß (TV-Fluß)

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0,$$

wurde im Rahmen der Anwendung in der Bildverarbeitung von L.I. Rudin, S. Osher und E. Fatemi [47] vorgeschlagen und basiert auf der Minimierung der Total-Variation im Raum der Funktionen mit beschränkter Variation mit modellbedingten Nebenbedingungen, die vom Anfangsbild abhängen. Die zweite Gleichung wurde von P. Perona und J. Malik [45] vorgeschlagen:

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) = 0.$$

Ihre effektive Auswirkung auf die Kantenerhaltung in der Bildverarbeitung beruht auf dem gradientenabhängigen Vorwärts-Rückwärts-Diffusionskoeffizienten. Es existiert keine für die Anwendung geeignete Lösungstheorie mit praxisrelevanten Anfangsdaten. Wesentlich wird in diesem Kapitel die Herleitung einer neuen sowohl mathematisch als auch von Seiten der Implementierung her zugänglichen Modellgleichung sein.

Im dritten Kapitel werden die zum Verständnis der mathematischen Lösungstheorie notwendigen Konzepte vorgestellt. Hier stehen die Arbeiten D. Kinderlehrer und P. Pedregal [32] und P. Pedregal [44] im Vordergrund. Als Grundlage für den Beweis einer maßwertigen Lösung, aufgefaßt als singulären Limes des regularisierten Problems, dient die Arbeit M. Slemrod [50], die hier verallgemeinert wird.

Im vierten Kapitel wird die Modellgleichung mit der Methode der Finiten-Elemente diskretisiert. Zunächst wird ein *nichtdegeneriertes* Vorwärts-Rückwärts-Evolutionsproblem mit glatten Lösungen mit der Finiten-Elemente-Methode approximiert und Konvergenzraten hergeleitet. Dann wird das *degenerierte* Problem behandelt. Zur Herleitung der Fehlerabschätzungen und Konvergenzraten des *degenerierten konvexifizierten* Modellproblems mit  $p$ -Struktur wählen wir  $p = 1 + \delta$  und werden  $\mathbf{q}$  durch  $\mathbf{p}_\delta$  ersetzen, mit

$$\sum_{i,k}^N \sum_{j,l}^M \frac{\partial (\mathbf{p}_\delta(A))_{ij}}{\partial A_{kl}} B_{ij} B_{kl} \geq c (\kappa + |A|)^{\delta-1} |B|^2 \quad \text{für } A, B \in \mathbb{R}^{M \times N},$$

$\kappa > 0$  und  $M = 1$ ,  $N = 2$ . Dieses Problem wird dann vollständig diskretisiert. Dazu wird  $\Omega$  trianguliert. Sei  $T_h$  eine Familie von regulären Triangulierungen und  $\tau$  die Schrittweite bezüglich der Zeit  $t$ . Wir erhalten eine Finite-Elemente-Lösung  $U_{\tau,h}$  auf  $\Omega \times [0, T]$ . Nun werden die Fehlerabschätzungen bezüglich einer Quasinorm nach J.W. Barrett und W.B. Liu [12]

$$\|\nabla u\|_{(\nabla v)}^2 := \int_{\Omega} (\kappa + |\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

in der Form

$$\int_0^T \|u - U_{\tau,h}\|_{(\nabla u)}^2 dt \leq c(h^\alpha + \tau^\beta)$$

hergeleitet.

Zur Stabilisierung des Problems wird das konvexifizierte Modellproblem mit Hilfe einer *diskontinuierlichen* Finiten-Elemente-Methode diskretisiert. Das Konzept der Quasinormen wird auf die Methode diskontinuierlicher Finite Elemente verallgemeinert und ein geeigneter Strafterm eingeführt. Die so gewonnenen Resultate sichern die Konvergenz der Finiten-Elemente-Approximation des nichtkonvexen Problems gegen die Lösung der Young'schen-Maß-Lösung; zusätzlich wird die Konvergenzrate in  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  abgeschätzt.

Im letzten Abschnitt des Kapitels wird die Diskretisierung des Modellproblems mit  $\delta = 0$  behandelt. Hierzu werden  $P_1$ -Elemente benutzt und die diskrete Lösung charakterisiert.

Im Kapitel fünf wird das Verhalten der numerischen Lösung an künstlichen geometrischen Strukturen getestet. Die Evolution der künstlichen Objekte stellt eine qualitative Testmethode dar, die die Güte des Diffusionsmodells zur Formgeneralisierung beurteilt. Hier zeigt sich, daß sich das vorgeschlagene Diffusionsmodell besonders gut zur Formgeneralisierung von geomorphologischen Höhenmodellen eignet. Zum Schluß werden Höhenmodellen erfolgreich durch die Modellgleichung generalisiert.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Privat-Dozent Dr. C. Ebmeyer und Prof. H.-P. Helfrich für ihre Unterstützung und zahlreichen Diskussionen bei der Anfertigung dieser Arbeit bedanken.

# Kapitel 2

## Modellierung

### 2.1 Einleitung und Motivation

Die mathematische Beschreibung von geologischen Flächen ist eine relativ alte, immer wieder neu aufgeworfene Fragestellung in der Mathematik (cf. [39],[18] und [33]). Dabei interessiert man sich für Kenngrößen wie die Steigung oder Krümmung, die auf verschiedenen Längenskalen zur Charakterisierung notwendig sind.

Eine geomorphologische Fläche wird mathematisch als Funktion  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dargestellt, wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein polygonales Gebiet ist. In der Praxis ist  $\Omega$  meist ein Rechteck, z.B.  $10 \times 20$  km, und der Funktionswert  $u(x)$  beschreibt die Höhe der geomorphologischen Fläche im Punkte  $x \in \Omega$ , z.B.  $u(x) = 100$  m. Wir wählen das Einheitsquadrat  $\Omega := [0, 1]^2$  als Referenzgebiet für unsere mathematische Betrachtung und bezeichnen mit  $Q_T := \Omega \times (0, T]$  den Raumzeitzyylinder. Die auch in der Bildverarbeitung verwendeten nichtlinearen Diffusionsgleichungen der Struktur

$$u_t - \operatorname{div}(\mathbf{q}(\nabla u)) = 0$$

mit einem anisotropen Flux  $\mathbf{q}$  eignen sich zur Generalisierung von geomorphologischen Flächen. Hier führt die künstliche Einführung der Zeit zur Schaffung einer neuen Skala der Generalisierung. Der Begriff der Generalisierung ist in dieser Arbeit zentral. Darunter soll die selektive Änderung einer Fläche verstanden werden, so daß geomorphologische Größen wie Sprungkanten oder Krümmungsgrößen erhalten bleiben, aber Unwesentliches aus der Fläche entfernt wird. Die verwendeten nichtlinearen Diffusionsgleichungen basieren auf der Minimierung nichtkonvexer Funktionale, d. h.

$$\inf_v \int_{\Omega} f(|\nabla v|) dx \text{ mit } \mathbf{q} = \nabla f,$$

was im allgemeinen auf oszillierende Lösungen führt. Anders als in der Materialforschung, wo diese oszillierenden Strukturen das Interesse ausmachen, sind in unserem Fall diese Strukturen unerwünscht.

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels wird die Anwendung von Modellen aus der Signal- und Bildverarbeitung auf das Problem der Formgeneralisierung motiviert. Im ersten Abschnitt wird auf die Generalisierung von geomorphologischen Flächen eingegangen. Im zweiten Abschnitt wird der Total-Variationsfluß

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0$$

als  $L^2$ -Gradientenfluß des Funktionals

$$J(u) := \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx$$

vorgestellt. Im Speziellen wird auf die Problematik der Formzerstörung von nichtkonvexen geometrischen Strukturen und von in der Geomorphologie wichtigen Krümmungsgrößen eingegangen.

Im dritten Abschnitt wird die von P. Perona und J. Malik [45] vorgeschlagene Modellgleichung

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) = 0$$

diskutiert. In der Praxis der Generalisierung ist dieses Modell dem Total-Variationsfluß überlegen, aber die Gleichung entzieht sich der zur Verfügung stehenden praktischen mathematischen Lösungstheorie.

Im vierten Kapitel wird das neue Modell in Form der Gleichung

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\lambda |\nabla u|^{2\delta} + \mu |\nabla u|^{3\delta+1}}{\lambda + |\nabla u|^{2(\delta+1)}} \nabla u \right) = 0$$

vorgeschlagen. Diese Gleichung versucht, die Vorteile des mathematischen Zugangs des Total-Variationsflusses mit dem in der Praxis wichtigen Verhalten der Perona-Malik-Gleichung zu verbinden. Es handelt sich um ein durch den TV-Fluß stabilisiertes Perona-Malik-Modell.

## 2.2 Das Total-Variations-Funktional und die nicht gewollte Konvexifizierung

In der Bildverarbeitung werden Kanten im Bild als Sprungstellen der Intensitätsfunktion aufgefasst. Die mathematische Theorie der Funktionen mit beschränkter Variation (BV) stellt ein besonders geeignetes Konzept zur Behandlung unstetiger Funktionen dar. Basierend auf der BV-Theorie schlugen L.I. Rudin, S. Osher and E. Fatemi [47] das folgende Energieminimierungsproblem vor: Finde  $u \in \operatorname{BV}(\Omega)$  mit

$$u = \operatorname{argmin}_{v \in \operatorname{BV}(\Omega)} \int_{\Omega} |Dv|$$

unter den Nebenbedingungen

$$\int_{\Omega} Ku \, dx = \int_{\Omega} u \, dx, \quad \int_{\Omega} |Ku - u_d|^2 \, dx = \sigma \int_D dx$$

für ein Anfangsbild  $u_d$ , wobei die Nebenbedingungen aus der Annahme resultieren, daß das Rauschen einen verschwindenden Mittelwert und die Standardabweichung  $\sigma$  besitzt. Hier bezeichnet  $K$  einen Faltungsoperator.

In der Praxis wird das Problem mit Hilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode in ein Problem ohne Nebenbedingungen überführt:

$$J_{\lambda}^{\Omega}(u) := \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 \, dx. \quad (2.1)$$

Hier kann  $\lambda \geq 0$  auch als Strafterm zwischen der Anpassung an das Anfangsbild und dem Entrauschen des Bildes betrachtet werden.

In der Bildverarbeitung wird die Suche nach Minimierern meist in Form eines Gradientenflusses betrieben. Dies führt auf nichtlineare Diffusionsgleichungen, welche eine physikalische Bedeutung haben. In Anwendungen beschreiben diese die zeitliche Entwicklung. Meistens entspricht die Lösung  $u$  einer Dichtefunktion. Falls der Rand  $\partial\Omega$  des Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  hinreichend glatt ist, entspricht die absolute Masse im Inneren des Gebiets dem negativen Nettoflux durch den Rand  $\partial\Omega$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx = - \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS,$$

wobei  $\vec{F}$  die Flußdichte bezeichnet. Unter der Voraussetzung geeigneter Glattheitsannahmen, die den Grenzwerttausch gestatten, ergibt sich  $u_t = -\operatorname{div} \vec{F}$ . In vielen Anwendungen ist  $\vec{F}$  proportional zum Gradienten von  $u$ .

So führt die Minimierung mit der Methode des steilsten Abstieges auf den  $L^2$ -Gradientenfluß

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= 0 && \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) &= u_d(x) && \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

für eine positive Zeit  $T$  und mit einer geeigneten Approximation von  $u_d$ . Hier bezeichnet  $\mathbf{n}$  die äußere Normale an  $\partial\Omega$ . Dieser Gradientenfluß wird in der Literatur auch als TV-Fluß bezeichnet. Die konvexe Struktur des Problems (2.2) läßt die Anwendung von nichtlinearen Halbgruppen zu und sichert die Existenz und Eindeutigkeit von BV-Lösungen. Die Schwierigkeit der Nichtregularität des Funktional wird in den Arbeiten von F. Andreu, G. Bellettini, V. Casselles, J.I. Diaz und J.M. Mazón untersucht, indem das Subdifferentials  $\partial J_{\lambda}^{\Omega}$  charakterisiert wird. Die Resultate sind zum Beispiel in der Monographie [4] zu finden.

Obwohl diese Modellgleichung in der Bildverarbeitung erfolgreich Verwendung findet, cf. [19], [54], [55] und [42], ist sie für die Formgeneralisierung nicht optimal, da der TV-Fluß schon nach kurzer Zeit wichtige geomorphologische Geometrien zerstört. Um dieses Problem zu beheben, ist ein stärkerer anisotroper Charakter der Gleichung hilfreich und Gegenstand der folgenden Abschnitte.

## 2.3 Problem der Generalisierung

Generalisieren ist eine Art der Informationsverdichtung in den zugrundeliegenden Daten unter selektiven Gesichtspunkten. Hier interessiert uns die Wahrung der geometrischen Kenngrößen der Fläche, wie z.B. der Krümmung. Der geomorphologische Krümmungsbegriff ist in der Literatur nicht fest umschrieben, unsere Darstellung folgt den Ausführungen in [14]. In der Kartographie wird das als Folgekarten-Prinzip umschriebene Erstellen einer neuen Karte aus Karten kleineren Maßstabs als kartographische Generalisierung bezeichnet. Zwei qualitativ verschiedene Arten der Generalisierung treten dabei zu Tage: Einerseits die thematische und andererseits die geometrische.

Die thematische Generalisierung zeichnet sich durch inhaltliche Änderung, also die Umgestaltung von thematischen Merkmalen, aus. Grundlegend dabei ist die damit einhergehende Modellgeneralisierung. Dabei bezieht man sich in erster Sicht auf die semantische Modellbildung. Aus den der Generalisierung bzw. der Erzeugung einer neuen Karte zugrunde liegenden Karten kleineren Maßstabs wird das neu zu schaffende semantische Modell abgeleitet. Entscheidend bei der neuen Konzeptentwicklung sind die elementaren Arbeitsschritte des Zusammenfassens, der Selektion und der Klassifizierung. Dieses Verfahren fußt auf einem hohen Erfahrungswert und verschliesst sich einer einfachen wissenschaftlich-empirischen Untersuchung. Die starke Maßstabsabhängigkeit der semantischen Beschreibung führt zudem zu weiteren Schwierigkeiten beim thematischen Generalisieren.

In dieser Arbeit liegt der Fokus klar auf der geometrischen Generalisierung. Hier ist der Maßstab der neuen Karte bezogen auf die topographischen Gegebenheiten wichtig. So wird der Mindestmaßstab für die Karte selektiv erhöht, so daß geographisch wichtige geometrische Eigenschaften erhalten bleiben, aber nicht relevante Details weggelassen werden. Ein besonders einfach zugängliches Beispiel ist in diesem Fall die Bruchkante eines Felsens, die nur auf einer sehr kleinen Längenskala in der Karte zu finden ist, aber einen hohen Informationsgehalt besitzt und auch auf Karten höheren Maßstabs vertreten sein sollte. Darin steckt aber eine Verknüpfung zur semantischen Generalisierung, da die Konzepte der Semantik stark von der lokalen Geometrie der Karte abhängen. Wie eingehend blenden wir in dieser Arbeit den semantischen Aspekt weitgehend aus und konzentrieren uns auf die geometrische Generalisierung. In der Modellfindung werden klassische geometrische Charakteristiken wie die Steigung und insbesondere die Krümmung und die Einteilung in konvexe und konkave Bereiche im Mittelpunkt stehen. In der mathematischen Betrachtung der Formgeneralisierung soll eine nichtreguläre geologische Flächen selektiv geglättet werden. Die aus Höhendaten ermittelte Fläche ist im allgemeinen kein reguläres Objekt und somit nicht als Graph einer stetigen Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  darstellbar. Dafür sind hauptsächlich zwei verschiedene Gründe verantwortlich. Einerseits kommen im Gelände durchwegs Unstetigkeitsstellen in Form von Bruchkanten vor. Andererseits führen Aufnahmefehler und Bearbeitungsfehler zur Variation der Meßpunkte. Nun ist es die Aufgabe der Formgeneralisierung, selektiv das Höhenmodell zu regularisieren, so daß für den Geologen wichtige Information wie die Bruchkanten beibehalten bleiben und die Funktion in einem für die Praxis zugänglichen mathematischen Raum liegt.

## 2.4 Die Perona-Malik-Gleichung und ihre verschiedenen Regularisierungen

Vorwärts-Rückwärts-Diffusionsgleichungen werden in der Bildverarbeitung zum selektiven Glätten und gleichzeitigen Schärfen von Helligkeitskontrasten eingesetzt. Gegeben sei ein verrauschtes Bild  $u_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Der einfachste Weg zur Wiederherstellung des Originalbildes mit Hilfe von Diffusionsgleichungen ist die Verwendung von linearen Filtern, modelliert durch lineare Diffusionsgleichungen unter entsprechenden Randwerten. Da diese linearen Gleichungen aber einen stark regularisierenden Effekt haben, entfernen sie nicht nur Rauschen, sondern auch Kanteninformation. Dieses Phänomen wird in der englischsprachigen Literatur als *blurring* bezeichnet. Es existieren verschiedene Wege, das Verhalten der Lösung in der Nähe von Kanten zu verbessern. Eine der erfolgreichsten Strategien ist die Verwendung nichtlinearer Diffusionsgleichungen mit kantenabhängigem Kontrollterm

$$\begin{aligned}
 u_t - \operatorname{div}(a(|\nabla u|)\nabla u) &= 0 && \text{in } Q_T, \\
 u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\
 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T],
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

definiert auf einem konvexen beschränkten  $C^2$ -Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ), mit gegebenem gestörten Anfangsbild  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . P. Perona und J. Malik [45] schlugen diese Form von Diffusionsgleichung mit dem Diffusionskoeffizienten

$$a(|\nabla u|^2) := \frac{1}{1 + |\nabla u|^2}$$

als Multiskalenproblem vor. In diesem Modell entspricht die Zeit einer neuen Skala, mit fortschreitender Zeit wird das Bild sukzessive verbessert und gleichzeitig vergrößert. Der Diffusionskoeffizient ist so konstruiert, daß er in der Nähe von Kanten, die großen Ortsgradienten  $\nabla u$  entsprechen, klein ist und die Diffusion stoppt oder sogar umkehrt, was zum Verstärken der Kanten führt. Die Diffusion ist relativ stark an Stellen, an denen der Gradient nur wenig variiert. Somit führt dieses Modell zum selektiven Glätten des Ursprungsbildes, da diese Gleichung einen Vorwärts-Rückwärts-Charakter besitzt, was aber dazu führt, daß das Problem schlecht gestellt ist. Angenommen, die Höhenlinie  $S := S(t)$  sei zu einem Zeitpunkt  $t$  hinreichend glatt. Der Vorwärts-Rückwärts-Charakter kann dann am Beispiel dieser Höhenlinie illustriert werden. Der elliptische Teil in der Nähe von  $S$  läßt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(a(|\nabla u|^2)\nabla u) &= a(|\nabla u|^2)\Delta u + 2a'(|\nabla u|^2)D^2u\nabla u \cdot \nabla u \\
 &= a(|\nabla u|^2)\Delta_S u + h(|\nabla u|^2)\partial_\xi^2 u,
 \end{aligned}$$

wobei  $D^2u$  die Hessematrix und  $\Delta_S$  der Laplace-Beltrami-Operator von  $S$  ist,  $\xi := -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  in Richtung des stärksten Anstiegs zeigt und

$$h(s) := g(s) + sg'(s), \quad s \geq 0,$$

ist. Der Vorwärts-Rückwärts-Charakter resultiert nun aus der Balance zwischen  $g$  und  $h$ . Der zweite Term  $h(s)$  ändert sein Vorzeichen einmal an der Stelle  $s = 1$  und wird für große Gradienten  $|\nabla u| \gg 1$  negativ und zum dominierenden Term und führt zur Rückwärtsdiffusion. Rückwärtige Wärmeflüsse sind schlecht gestellte Probleme, deren Instabilität sich auch für glatte Anfangsbedingungen in der Entwicklung von Singularitäten in beliebig kleiner Zeit zeigt [31].

Trotz dieser analytischen Schwierigkeit und einer nicht vorhandenen anwendungsrelevanten Lösungstheorie zeigen numerische Implementierungen keine Instabilitäten und motivieren Regularisierungen des Problems, die einen mathematischen Zugang ermöglichen. Die erste und meist verwendete Regularisierungsstrategie wurde von F. Catté, P.L. Lions, J.M. Morel und T. Coll [17] durch eine Ortsregularisierung in der Nichtlinearität vorgeschlagen. Der Gradient  $\nabla u$  im Diffusionskoeffizienten  $a(|\nabla u|^2)$  wird in diesem Ansatz durch ein mit einem Gaußkern  $G_\sigma$  gefaltetes Argument  $\nabla G_\sigma * u$  ( $\sigma^2$  entspricht der Varianz) ersetzt. In [17] ist die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung  $u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T), H^1(\Omega))$  für Anfangswerte  $u^0 \in L^2(\Omega)$  und für jedes  $T > 0$  gezeigt. Außerdem hängt die Lösung Lipschitz-stetig von den Anfangswerten ab und es gilt

$$\operatorname{ess\,min} u^0 \leq u^\sigma(\cdot, t) \leq \operatorname{ess\,max} u^0, \quad t \geq 0,$$

so daß

$$u(\cdot, t) \rightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^0 \, dx$$

exponentiell abfällt in  $L^2$  falls  $t \rightarrow \infty$  (cf. [56, Abschnitt 2.4]).

Andere Strategien der Regularisierung der Gleichung sind zum Beispiel die lineare Stabilisierung durch einen Term vierter Ordnung [13]. M. Nitzberg und T. Shiotani [41] waren die ersten, die eine Regularisierung gleichzeitig im Ort und in der Zeit vorschlugen. In einer kürzlich erschienenen Arbeit führt Amann diesen Ansatz in Art einer lokal gefalteten Form fort [3] und verwendet Sätze aus der Maximalregularitätstheorie zum Beweis einer lokalen starken Lösung  $u \in \mathcal{H}(Q_T^*)$ . Dabei werden relativ starke Regularitätsannahmen an die Daten gestellt.

## 2.5 Die Modellgleichung

In diesem Abschnitt wird die Modellgleichung aufgestellt, die sich besonders zur geomorphologischen Formgeneralisierung eignet. Betrachtet man die Perona-Malik-Gleichung als  $L^2$ -Gradientenfluß des Funktionals

$$\text{PM}(u) := \int_{\Omega} \log(1 + |\nabla u|^2) \, dx,$$

so ist das zugehörige Minimierungsproblem durch

$$\inf_v \text{PM}(v)$$

gegeben. Dieses Minimierungsproblem entzieht sich wegen der Struktur des Integranden der Standardtheorie. Einerseits besitzt der Integrand nur sublineares Wachstum, und andererseits hat er eine nichtkonvexe Struktur. Die Konvexifizierung des Funktionals würde dem Nullfunktional entsprechen. Das sublineare Wachstum wirft die Frage nach der Wahl eines geeigneten Funktionenraums auf.

Die nichtkonvexe Struktur des Perona-Malik-Funktional ist hauptsächlich für die geometrische Strukturhaltung verantwortlich und motiviert die Beibehaltung einer nichtkonvexen Struktur für die neue Modellgleichung. Außerdem wollen wir Höhenmodelle als Graph einer BV-Funktion verstehen, und so soll das Funktional über mindestens lineares Wachstum verfügen.

Nun wird das Modellproblem formuliert, das diesen Bedingungen genügt: Für  $\lambda \in (0, 1)$  und  $\mu \in (0, 1)$  finde  $u$  mit

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\lambda + \mu |\nabla u|}{\lambda + |\nabla u|^2} \nabla u \right) &= 0 && \text{in } Q_T \\ u(0, \cdot) &= 0 && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die beiden freien Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  steuern die Anisotropie der Gleichung. Die Gleichung entspricht dem Perona-Malik-Fluß bzw. dem TV-Fluß für die Grenzfälle  $\lambda = 1, \mu = 0$  bzw.  $\lambda = 0, \mu = 1$ . Im Gegensatz zur Perona-Malik-Gleichung ist diese Gleichung nicht degeneriert und die Funktion  $a(s)s := (\lambda + s^2)(\lambda s + \mu s^2)^{-1}$  besitzt in  $s_0 := \mu + \sqrt{\mu^2 + \lambda}$  ihr Maximum und ist monoton steigend in  $[0, s_0]$  und monoton fallend in  $[s_0, \infty]$ . Diese Nichtmonotonie führt wie im Falle der Perona-Malik-Gleichung zu einem selektiven Glätten und

Verstärken der Kanten in Abhängigkeit von  $\nabla u$ . Die Gleichung hat einen stark glättenden Charakter in Bereichen, wo der Gradient klein ist,  $|\nabla u| < s_0$ , und einen verstärkenden Charakter, wo der Gradient groß ist,  $|\nabla u| \geq s_0$ . Wie im Fall der Perona-Malik-Gleichung besitzt das Problem einen Vorwärts-Rückwärts-Parabolischen Charakter und entzieht sich der Standardtheorie der monotonen Operatoren. Es existiert aber ein verallgemeinerter Lösungsbegriff im Sinne Young'scher Maße.

Außerdem wird folgendes Modell aufgestellt:

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(\mathbf{q}_\delta(\nabla u)) &= 0 && \text{in } Q_T, \\ u(0, \cdot) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T] \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit

$$\mathbf{q}_\delta(\nabla u) = \left( \frac{\lambda |\nabla u|^{2\delta} + \mu |\nabla u|^{3\delta+1}}{\lambda + |\nabla u|^{2(\delta+1)}} \nabla u \right),$$

für kleines  $\delta > 0$ . Im Fall  $\delta = 0$  fällt es mit dem Modell (2.4) zusammen. Für  $\delta > 0$  vereinfacht sich die Lösungstheorie. Man erhält Lösungen im Sinne von Young'scher Maßen, BV-Theorie ist nicht notwendig.

Im Vergleich zum TV-Fluß bleiben die für die Formgeneralisierung wichtigen Strukturen wie die Vertikalwölbung und die Horizontalwölbung bei beiden Modellen (2.4) und (2.5) erhalten.



# Kapitel 3

## Young'sche Maße und der Raum der beschränkten Variation

### 3.1 Einleitung

In diesem Kapitel führen wir die zur Behandlung des Modellproblems notwendigen theoretischen Konzepte ein. Nichtkonvexe Probleme werden in der Theorie durch zwei verschiedene Ansätze behandelt. Im ersten Ansatz handelt es sich um die stetige Fortsetzung des Problems auf eine geeignete größere Lösungsmenge. Im zweiten Ansatz ersetzt man das Problem durch die größte unterhalbstetige affine Approximation und erreicht dadurch die Unterhalbstetigkeit des Funktionals bzgl. der schwachen Topologie. Beide Ansätze sind äquivalent.

### 3.2 Young'sche Maße

Da im allgemeinen keine klassische Lösung zum Modellproblem existiert, benötigen wir ein neues Konzept von Lösungen. Es handelt sich um das maßtheoretische Hilfsmittel der Young'schen Maße, das sich zur Beschreibung von Oszillationen von Minimierungssequenzen besonders gut eignet. Das Konzept der Young'schen Maße wurde zur Beschreibung allgemeiner Lösungen von Minimierungsproblemen von L.C. Young eingeführt [59], [58]. Es findet Anwendung in der Kontrolltheorie, in der Variationsrechnung und in der mathematischen Physik [44], [6], [5], [51].

#### Radonmaße und Young'sche Maße

Wir bezeichnen mit

- (i)  $L^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{R})$ ,  $W^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}) = W^{p,q}(\Omega)$  die üblichen Lebesgue- und Sobolevräume,
- (ii)  $u|_D \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$  den Wert der Funktion auf dem Rand  $\partial\Omega$  im Sinne der Spur,
- (iii)  $C_0(\mathbb{R}^N)$  den Raum der stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}^N$  mit kompaktem Träger, d.h. für alle  $\epsilon > 0$  existiert eine kompakte Menge  $K \subset \Omega$  mit  $|\Omega - K| < \epsilon$ ,
- (iv)  $rca(\mathbb{R}^N) := C_0(\mathbb{R}^N)'$  den Raum der Radonmaße auf  $\mathbb{R}^N$ ,
- (v)  $\text{Prob}(\mathbb{R}^N) := rca_1^+(\mathbb{R}^N) := \{ \mu \in rca(\mathbb{R}^N) ; \mu \geq 0, \int_{\mathbb{R}^N} \mu(ds) = 1 \}$  den Raum der Radonwahrscheinlichkeitsmaße,

(vi)  $L_w^\infty(\Omega; rca(\mathbb{R}^N))$  den Raum der schwach meßbaren Radonmaße,

(vii)

$$\mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^n) :=$$

$$\left\{ \nu := (\nu_x)_{x \in \Omega} \in L_w^\infty(\Omega; rca(\mathbb{R}^n)); \nu_x \in rca_1^+(\mathbb{R}^n), \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} |s|^p \nu_x(ds) dx \in \mathbb{R} \right\}$$

den Raum der  $L^p$ -Young'schen Maße.

**Satz 3.2.1.** *Sei  $\delta$  das Diracmaß. Dann gilt:*

(i) *Die Abbildung  $y \mapsto \nu := \{\delta_{y(x)}\}_{x \in \Omega}$  ist eine stetige und dichte Einbettung von  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  nach  $\mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .*

(ii) *Die Menge  $\mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  stellt eine natürliche  $\sigma$ -kompakte Hülle von  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  dar.*

Für den Beweis veweisen wir auf [44].

**Definition 3.1.** Sei  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{N \times M}$  der Raum der  $N \times M$  Matrizen und  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Menge. Eine Familie Wahrscheinlichkeitsmaße  $\nu = (\nu_x)_{x \in \Omega}$  definiert auf  $\mathcal{M}$  ist ein  $W^{1,p}$ -Young'sches Maß für  $p \in [1, \infty]$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Abbildung  $x \rightarrow \int_{\mathcal{M}} f(A) \nu_x(dA) \in \mathbb{R}$  ist eine Lebesgue meßbare Funktion für alle beschränkten stetigen Funktionen  $f$  auf  $\mathcal{M}$ .

(ii) Es existiert eine Funktionenfolge  $(u_k)_{k>0} \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , die sich darstellen läßt als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \phi(\nabla u_k)(x) dx = \int_E \int_{\mathcal{M}} \phi(A) \nu_x(dA) dx \quad (3.1)$$

für  $E \subset \Omega$  und

$$\phi \in \mathcal{E}_0^p(\mathcal{M}) := \left\{ \phi \in C(\mathcal{M}) : \lim_{|A| \rightarrow \infty} \frac{\phi(A)}{1 + |A|^p} \text{ existiert} \right\}$$

für  $p \in [0, \infty)$  und alle stetigen Funktionen  $\phi \in C(\mathcal{M})$ , falls  $p = \infty$ .

Setze

$$\langle \phi, \nu_x \rangle := \int_{\mathcal{M}} \phi(A) \nu_x(dA)$$

und sei für  $\nu \in \text{Prob}(\mathbb{R}^N)$  die Norm

$$\|\nu\|_{\text{Prob}(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} d\nu.$$

Wir wollen mit

$$|D| := \int_D dx \quad \text{für } D \subset \Omega$$

das Lesbegue'sche Maßinhalt von  $D$  bezeichnen.

**Definition 3.2.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt quasikonvex, falls

$$\int_{\Omega} f(P + \nabla \phi) dx \geq |\Omega| f(P)$$

für jede Testfunktion  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  und jedes  $P \in \mathbb{R}^{M \times N}$  gilt.

In vielen Fällen lassen sich partielle Differentialgleichungen in Form eines Variationsproblems formulieren. Die direkte Methode der Variationsrechnung ist eine erfolgreiche Methode um unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz einer Lösung zu sichern, cf. [22]. Einer der wichtigsten Voraussetzungen ist die Unterhalbstetigkeit des betrachtenden Funktionals. In der Arbeit von E. Acerbi und N. Fusco [1] wurde die Äquivalenz der Quasikonvexität und Unterhalbstetigkeit für eine breite Klasse von Problemen gezeigt. Die Berechnung der quasikonvexen Einhüllenden erweist sich als schwierig. Aber im skalaren Fall, d.h. falls der Bildraum oder Zielraum des zu suchenden Minimierers eindimensional ist, fällt die Konvexität mit der Quasikonvexität zusammen. Die konvexe Einhüllende läßt sich im Speziellen über die Fenchel-Transformation berechnen.

**Definition 3.3.** (Fenchel-Transformation)

Sei  $X$  ein vollständiger Raum und  $X^*$  sein Dualraum, so heißt für eine Funktion  $f \in C(\mathbb{R})$

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in X} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \},$$

$$f^{**}(x) := \sup_{x^* \in X^*} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \}$$

die Duale bzw. Biduale von  $f$ .

### 3.3 Maßwertige Lösungen

In diesem Abschnitt führen wir maßwertige Lösungen für Systeme von Evolutionsprobleme ein. Im ersten Teil wird die Definition einer maßwertigen Funktion erörtert und anschließend im zweiten Teil dieses Abschnittes die Lösung charakterisiert. Der dritte Teil des Abschnitts faßt die Resultate aus [50] zusammen und verallgemeinert sie auf den Fall  $1 < p < 2$ . Im letzten Teil des Abschnitts behandeln wir die maßwertige Lösungstheorie basierend auf der Arbeit von D. Kinderlehrer und P. Pedregal [32].

#### Maßwertige Lösung

Sei  $\mathbf{q} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  der Gradient eines  $C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$  Potentials  $\Phi$ , d.h.

$$\mathbf{q}(A) = \nabla \Phi(A) \quad \forall A \in \mathbb{R}^N.$$

Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Wachstumsbedingung für  $p \in (1, 2)$

$$|\Phi(A)| \leq C(1 + |A|^p) \quad \text{und} \quad c(|A|^p - 1) \leq \Phi(A) \quad \forall A \in \mathbb{R}^N,$$

(ii) Die Bedingung

$$\ker(A \cdot \mathbf{q}(A)) := \{A \in \mathbb{R}^N ; A \cdot \mathbf{q}(A) = 0\} \subset \{A \in \mathbb{R}^N ; |A| \leq \rho_0\} \quad \text{für ein } \rho_0 > 0,$$

wobei  $(\cdot)$  das euklidische Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^N$  bezeichnet.

Betrachte das Problem: Finde  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt

$$u_t - \operatorname{div}(\mathbf{q}(\nabla u)) = 0 \quad \text{in } Q_T, \quad (3.2)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{q}(\nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T]. \quad (3.4)$$

Eine Funktion  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,p}(\Omega))$  mit  $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  ist eine maßwertige Lösung des Problems (3.2)-(3.4) auf  $Q_T$ , falls eine maßwertige Abbildung

$$\nu : (x, t) \mapsto \nu_{x,t} \in \operatorname{Prob}(\mathbb{R}^N)$$

vom Raumzeitzyylinder  $Q_T$  in  $\operatorname{Prob}(\mathbb{R}^N)$ , dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße, mit

$$(u_t, w) + (\langle \mathbf{q}(A), \nu_{x,t}(A) \rangle, \nabla w) = 0 \quad \forall w \in W^{1,p}(\Omega)$$

fast überall in  $(0, T)$  existiert und falls

$$\nabla u = \langle \operatorname{Id}_N, \nu_{x,t} \rangle \quad \text{fast überall in } Q_T, \quad (3.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega$$

gilt. Hier bezeichnet  $\operatorname{Id}_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  die Identität im  $\mathbb{R}^N$ .

Wir nennen die maßwertige Lösung  $(u, \nu)$  eine  $W^{1,p}$ -maßwertige Lösung von (3.2)-(3.4), falls  $\nu$  ein  $W^{1,p}$ -Gradienten-Young'sches Maß mit

$$\int_0^T \int_\Omega (\langle \nu, \mathbf{q} \rangle \cdot \nabla \xi + u_t \xi) dx dt = 0, \quad \forall \xi \in C_0^\infty(Q_T), \quad (3.6)$$

$$\langle \nu_{x,t}, \mathbf{q} \cdot \operatorname{Id}_N \rangle = \langle \nu_{x,t}, \mathbf{q} \rangle \cdot \langle \nu_{x,t}, \operatorname{Id}_N \rangle \quad \text{f.ü. in } Q_T, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{supp} \nu_{x,t} \subset \{A \in \mathbb{R}^n : \phi(A) = \phi^{**}(A)\} \quad \text{f.ü. in } Q_T, \quad (3.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega \quad (3.9)$$

$$\mathbf{q}(\nabla u) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T] \quad (3.10)$$

ist. Zur Verallgemeinerung der Resultate aus [50] benötigen wir das folgende Resultat aus [7]:

**Satz 3.3.1.** *Sei  $S \subset \mathbb{R}^N$  Lebesgue meßbar,  $K \subset \mathbb{R}^M$  eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge und  $z_j : s \rightarrow \mathbb{R}^M$  eine Folge von Lebesgue meßbaren Funktionen mit  $z^j(\cdot) \rightarrow K$  im Maße für  $j \rightarrow \infty$ , d.h. für jede offene Umgebung  $U$  von  $K$  gilt*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \{y \in S ; z^j(y) \notin U\} = 0.$$

*Dann existiert eine Teilfolge  $z^{j_k}$  von  $z^j$  und eine Familie  $\{\nu_y\}$ ,  $y \in S$  von positiven Maßen definiert auf  $\mathbb{R}^M$ , meßbar in Bezug auf  $y$ , so daß*

(i)

$$\|\nu_y\|_{\text{Prob}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^M} d\nu_y \leq 1 \quad \text{für fast alle } y \in S,$$

(ii)

$$\text{supp } \nu_y \subset K \quad \text{für fast alle } y \in S,$$

(iii)

$$f(z^{j_k}) \xrightarrow{*} \langle \nu_y, f \rangle \text{ in } L^\infty(S) \text{ für alle } f \in C_0(\mathbb{R}^M).$$

Und somit erhalten wir, vergleiche auch [50], das folgende Lemma:

**Lemma 3.4.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  und  $\{z^j\}$  eine Folge mit  $z^j : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  beschränkt in  $L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ . Dann gilt

(i) Es existiert ein  $z \in L^\infty(0, \infty; (L^2(\Omega))^N)$  und eine Teilfolge  $\{z^{j_k}\}$ , so daß  $z^{j_k} \xrightarrow{*} z$  in  $L^\infty(0, \infty; (L^2(\Omega))^N)$ .

(ii) Die so erhaltene Teilfolge  $\{z^{j_k}\}$  erfüllt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty, i} \{y \in S \cap B_R ; |z^{j_k}(y)| \geq i\} = 0$$

für alle  $R > 0$ , wobei  $B_R := \{y \in \mathbb{R}^N ; |y| \leq R\}$ .

(iii) Für jede stetige Funktion  $f$  mit

$$|f(A)| \leq C(1 + |A|^p), \quad 0 < p < 2, \quad A \in \mathbb{R}^N$$

und jede beschränkte Teilmenge  $B \subset \Omega \times \mathbb{R}^N$  gilt

$$f(z^{j_k}) \rightharpoonup \langle \nu_y, f \rangle \quad \text{in } L^1(B).$$

Wir werden nun den Existenzsatz aus [50] einer maßwertigen Lösung des Problems (3.2)-(3.4) für den Fall  $1 < p < 2$  verallgemeinern.

**Satz 3.3.2.** Es existiert eine maßwertige Lösung  $(u, \nu)$  des Problems (3.2)-(3.4).

*Beweis:*

### 1. Hilfsproblem

Betrachte das Hilfsproblem: Finde  $u^\epsilon : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß gilt

$$u_t^\epsilon - \text{div}(\mathbf{q}(\nabla u^\epsilon)) + \epsilon \Delta^2 u^\epsilon = 0 \quad \text{in } Q_T, \quad (3.11)$$

$$u^\epsilon(\cdot, 0) = u_0^\epsilon \quad \text{in } \Omega, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \Delta u^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T], \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T]. \quad (3.14)$$

Mit Hilfe der Monotonen Operatoretheorie [60] folgt die Existenz einer Lösung  $u \in L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega)) \cap C(0, T; W^{1,2}(\Omega))$  mit  $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  für jedes  $\epsilon > 0$ .

### 2. A priori-Abschätzungen

Formales Testen von (3.11) mit  $u^\epsilon$  ergibt die Abschätzung der Integration in der Zeit:

$$\frac{1}{2} \|u^\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \epsilon \|\Delta u^\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^T \int_\Omega \mathbf{q}(\nabla u^\epsilon) \cdot \nabla u^\epsilon \, dx \, dt \leq \frac{1}{2} \|u^\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Formales Testen mit  $u_t^\epsilon$  ergibt nach Integration in der Zeit:

$$\begin{aligned} \|u_t^\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\Delta u^\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T]} \int_\Omega \Phi(\nabla u^\epsilon(t)) \, dx \\ \leq \int_\Omega \Phi(\nabla u^\epsilon(0)) \, dx + \frac{\epsilon}{2} \|\Delta u^\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Wachstumsbedingung ergeben diese Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|u_t^\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\Delta u^\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u^\epsilon\|_{L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \\ \leq C \|u^\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \Phi(\nabla u^\epsilon(0)) \, dx. \end{aligned}$$

### 3. Charakterisierung des Grenzobjekts

Sei  $p^*$  der Sobolev-Exponent  $1 \leq p^* < \frac{2N}{N-2}$ . Aus den gleichmäßigen Abschätzungen und dem Satz von Rellich folgt die Existenz eines Objektes

$\hat{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,p}(\Omega))$  mit  $\hat{u}_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  und einer Teilfolge  $u^\epsilon$  (nicht umbenannt), so daß

$$\begin{aligned} \nabla u^\epsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} \nabla \hat{u} && \text{schwach-* in } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u^\epsilon &\rightarrow \hat{u} && \text{stark in } L^\infty(0, T; L^{p^*}(\Omega)), \\ u_t^\epsilon &\rightharpoonup \hat{u}_t && \text{schwach in } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \hat{u}^\epsilon(t) &\rightarrow \hat{u}(0) && \text{in } L^2(\Omega) \text{ für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Aus Lemma (3.4) angewendet auf die beschränkte Folge  $\{\nabla u^\epsilon\}$  folgt die Existenz einer Teilfolge  $\{u^\epsilon\}$  (nicht umbenannt) und eines Maßes  $\nu$ , so daß für fast überall in  $(0, T]$  gilt

$$(u_t^\epsilon, w) + (\mathbf{q}(\nabla u^\epsilon), \nabla w) = 0, \quad \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (\hat{u}_t, w) + (\langle \mathbf{q}, \nu \rangle, \nabla w) = 0 \quad \forall w \in W.$$

Hier ist  $W := \{w \in C^\infty(\Omega); \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0\}$ . Mit einem Dichtheitsargument folgt dann die Existenz einer maßwertigen Lösung  $(\hat{u}, \nu)$ .

□

**Bemerkung 3.3.3.** *In Hinblick auf die folgende Finite-Elemente-Approximation des Modellproblems wollen wir folgendes vermerken. Wie in der Arbeit von H.W. Alt und S. Luckhaus [2] kann anstelle der Stabilisierung durch einen Term vierter Ordnung ein Galerkin-Ansatz gewählt werden. Der Parameter  $\epsilon$  müßte dann durch die Zeitschrittweite beziehungsweise durch die Gitterweite ersetzt werden. Dieser Ansatz sichert dann die Konsistenz der Finite-Elemente-Approximation des Problems.*

# Kapitel 4

## Finite-Element-Approximation und Konvergenzraten

### 4.1 Nichtdegeneriertes Beispielproblem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$ , ein beschränktes, offenes Gebiet mit Lipschitzrand  $\partial\Omega$ . In diesem Abschnitt wird das folgende nichtdegenerierte Problem vollständig diskretisiert: Finde  $u : Q_T := \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div} (a (|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla u) &= 0 & \text{in } Q_T, \\ u(0, \cdot) &= u_0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0, T]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Behandlung dieser Gleichung dient hauptsächlich der Einführung von Notation und Begriffen. Es handelt sich trotz der Regularisierung um ein nichtmonotones Problem, die Regularisierung in der Nichtlinearität führt aber auf ein nichtdegeneriertes Problem. Zum Aufstellen von Fehlerraten werden Dualitätsargumente verwendet, die Regularitätsanforderungen sowohl an die Lösung als auch an die Nichtlinearität stellen. Hier bezeichnet  $a \in C^\infty(\mathbb{R})$  eine glatte Funktion und  $R_\sigma : L^1(\Omega)^N \rightarrow C^1(\Omega)^N$  einen  $L^2$ -stetigen Operator mit Regularisierungsparameter  $\sigma \in (0, 1)$ .

Für den Regularisierungsoperator soll gelten, daß für Konstanten  $c_\sigma, C_\sigma \in \mathbb{R}_+$  gilt:

$$(i) \quad 0 < c_\sigma < |\nabla R_\sigma v|^2 \leq C_\sigma, \quad |a'(|\nabla R_\sigma v|^2)| \leq C_\sigma, \quad \text{für alle } v \in L^1(\Omega) \quad (4.2)$$

$$(ii) \quad |\nabla R_\sigma u| \leq C_\sigma. \quad (4.3)$$

Wir wählen dann  $\sigma$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $R_\sigma$  beziehungsweise von  $c_\sigma, C_\sigma$ , so daß für  $c, C > 0$  gilt

$$(i) \quad 0 < c\sigma < a(|\nabla R_\sigma v|^2) \leq 1, \quad |a'(|\nabla R_\sigma v|^2)| \leq C, \quad \text{für alle } v \in L^1(\Omega) \quad (4.4)$$

$$(ii) \quad |\nabla a(|\nabla R_\sigma u|^2)|^2 \leq \frac{C}{\sigma}. \quad (4.5)$$

Weiterhin sollen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

(HE1)  $u_0(x) \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega; \mathbb{R})$  mit  $0 \leq u_0(x) \leq 1$ ,

(HE2)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Polygonebiet,

(HE3)  $T \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\}$ .

Wir werden in diesem Kapitel die von  $u$  unabhängigen Konstanten  $c > 0$  und  $C > 0$  für verschiedene Abschätzungen ohne Umbenennung verwenden.

**Satz 4.1.1.** *Sei  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Dann existiert eine eindeutige Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $u \in C(0, T ; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T ; H^1(\Omega))$  und (4.1) im distributionellen Sinn erfüllt ist. Für die Lösung gilt sogar  $u \in C^\infty(\Omega \times (0, T])$ .*

*Beweis:*

Vergleiche [17]. Wir verwenden ein Fixpunktargument. Definiere den Teilraum

$$W(0, T) := \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), v_t \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')\},$$

der versehen mit der Graphennorm zum Hilbertraum wird. Betrachte das Problem: Suche zu festem  $v \in W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , wobei

$$\|v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

ein  $u^v \in W(0, T)$  mit

$$(u_t^v, \chi) + (a(|\nabla R_\sigma v|^2) \nabla u^v, \nabla \chi) = 0 \quad \forall \chi \in H^1(\Omega) \text{ f.ü. in } [0, T],$$

mit  $u^v(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$ . Mit der Voraussetzung (4.4)-(4.5) finden wir mit Standardmethoden für parabolische Evolutionsprobleme eine eindeutige Lösung (siehe [29]), [34]). Formales Testen mit  $\chi = u^v$  in (4.1) ergibt

$$\|u^v\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C\sigma^{-1} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.6}$$

$$\|u^v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.7}$$

und Testen mit beliebigen  $\chi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  mit  $\|\chi\| \leq 1$  führt zu

$$\sup_{\chi \in H^1(\Omega), \|\chi\| \leq 1} (u_t^v, \chi) \leq \|a\|_{L^\infty} \|\nabla u^v\| \leq \|\nabla u^v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sigma^{-1} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.8}$$

und somit zu

$$\|u_t^v\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \leq C\sigma^{-1} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer Konstanten  $C > 0$ , welche von  $v$  und  $\sigma$  unabhängig ist.

Betrachte nun die Teilmenge

$$W_0 := \{v \in W(0, T) ; w \text{ erfüllt (4.6), (4.7), (4.8) und } w(0) = u_0\}$$

von  $W(0, T)$  und definiere somit den Lösungsoperator  $L : W_0 \rightarrow W_0$  durch  $v \mapsto u^v$ . Da  $W_0$  eine konvexe, nichtleere, schwachkompakte Teilmenge ist, erlaubt die schwache Stetigkeit des Operators  $L$  die Anwendung des Fixpunktsatzes von Schauder, (siehe [49]). Da  $W(0, T)$

kompakt in  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  eingebettet ist, folgt die Existenz eines  $u \in W_0$  mit  $u = Lu$  und somit die Existenz einer Lösung des Ausgangsproblems. Um die schwache Stetigkeit zu zeigen, betrachte eine Folge  $w_i \rightharpoonup w$  schwach in  $W_0$  und betrachte  $u_i := Lw_i$ . Mit dem Einbettungssatz von Rellich [49] erhalten wir eine konvergente Teilfolge  $u_{j_k}$  mit

$$\begin{aligned} u_{k_j} &\rightharpoonup \bar{u} && \text{in } L^2(0, T; H^1(\Omega)) && w_j &\rightharpoonup w && \text{in } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ u_{k_j} &\rightarrow \bar{u} && \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) && w_j &\rightarrow w && \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u_{k_j}}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} && \text{in } L^2(0, T; (H^1(\Omega))') && \frac{\partial w_j}{\partial x_i} &\rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial x_i} && \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

für  $i = 1, 2$ , und somit gilt wegen der Stetigkeit des Regularisierungsoperators und der Funktion  $a$

$$a(|\nabla w_j|^2) \rightarrow a(|\nabla w|^2) \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Somit können wir zum Grenzübergang in  $Lu_{j_k}$  übergehen und erhalten  $Lw = u$ . Aus der Eindeutigkeit der Lösung bzw. aus der Injektivität des Lösungsoperators ergibt sich, daß die ganze Folge schon in  $W(0, T)$  gegen  $u = Lw$  konvergiert.

Die Regularität der Lösung  $u \in C^\infty((0, T] \times \Omega)$  läßt sich mit einem bekannten Bootstrap-Argument zeigen. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Gronwall-Lemma. Beide Beweisschritte sind in [17] zu finden. □

Für den ursprünglichen Fall  $R_\sigma(v) = G_\sigma * v$  des Gaußkerns ist die Vertauschungsregel  $\nabla G_\sigma = G_\sigma * \nabla u$  anzuwenden und der Operator durch gespiegelte Randdaten stetig differenzierbar fortzusetzen.

## Finite Elemente

In diesem Abschnitt werden Finite Elemente eingeführt, welche zur Ortsdiskretisierung verwendet werden. Ein Element einer Triangulierung  $T_h$  sei ein Dreieck, welches mit  $\mathcal{T}_i$  oder abkürzend mit  $\mathcal{T}$  bezeichnet wird. Weiterhin soll gelten:

1.  $\Omega = \bigcup_{\mathcal{T} \in T_h} \mathcal{T}$  (folgt aus der Eigenschaft:  $\Omega$  ist ein Polygonegebiet).
2.  $T_h$  ist regulär im Sinne von [15] (S.108, Definition (4.4.15)).
3.  $T_h$  ist zulässig, d.h. keine Ecke eines Dreiecks liegt im Inneren einer Kante eines anderen Dreiecks.

Sei also  $\mathcal{T}_h$  eine reguläre Triangulierung von  $\Omega$  mit  $\max_{\tau \in T_h} \mathcal{T} \leq h$  und  $S_h$  eine Familie von endlich-dimensionalen Unterräumen von  $H^1(\Omega)$  definiert durch

$$S_h := \{\chi \in C^0(\bar{\Omega}) : \chi|_{\mathcal{T}} \text{ ist linear } \forall \mathcal{T} \in T_h\}. \quad (4.9)$$

Sei  $\Pi_h f \in S_h$  der  $C^0$ -stückweise lineare Interpolant der Funktion  $f$ , also gilt  $\Pi_h f(x^k) = f(x^k)$  für alle Knoten  $x^k$  der Triangulierung  $T_h$ . Wir führen die Notation  $(f, g) = \int_{\Omega} f g \, dx$  und

$$(f, g)_h = \int_{\Omega} \Pi_h(f g) \, dx$$

ein.

## Ortsdiskretisierung mit FEM

Wir folgen in diesem Abschnitt Thomée [53] (S.209 ff) und führen die Beweise in abgeänderter Form aus, um den Einfluß des Regularisierungsparameters  $\sigma$  zu analysieren.

Zuerst behandeln wir das semidiskrete Problem: Für  $t \in (0, T]$  finde  $u(t) \in S_h$ , so daß

$$(u_{h,t}, \chi) + (a(|\nabla R_\sigma u_h|^2) \nabla u_h, \nabla \chi) = 0 \quad \forall \chi \in S_h, \quad t \in (0, T], \quad (4.10)$$

$$u_h(0) = P_h u^0, \quad (4.11)$$

wobei  $P_h$  die  $L^2$ -Projektion auf  $S_h$  ist. Wir setzen  $N_h := \dim S_h$ . Die endliche Folge  $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$  bezeichne die Standardbasis von  $S_h$ , bestehend aus den Funktionen  $\Phi_i(x^j) = \delta_{ij} =$  Kronecker Delta, für alle Knoten  $x^j$ . Dann läßt sich (4.10) mit  $u_h(x, t) := \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \Phi_j(x)$  schreiben als

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j'(t) (\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \left( a \left( \left| \nabla R_\sigma \sum_{l=1}^{N_h} \alpha_l(t) \Phi_l \right|^2 \right) \nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k \right) = 0 \quad (4.12)$$

für  $k = 1, \dots, N_h$ .

Durch Setzen von  $\alpha := \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_{N_h}(t))^T$  und das Einführen der Matrizen  $A = (a_{jk})$ ,  $B_{ik} = (b_{ik})$  und  $C = (c_{lk})$  mit Elementen

$$a_{jk} = (\Phi_j, \Phi_k) \quad , \quad b_{ik} = \left( a \left( \left| \nabla R_\sigma \sum_{l=1}^{N_h} \alpha_l \Phi_l \right|^2 \right) \nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k \right)$$

läßt sich das System (4.10)-(4.12) umschreiben zu

$$A\alpha' + B(\alpha)\alpha = 0 \quad \text{für } j \in [0, T] \quad \text{mit } \alpha(0) = \gamma,$$

wobei  $\gamma$  die Knotenpunkte von  $u_h^0$  bezeichnet.

Mit der Annahme (4.4) sind die Matrizen  $A$  und  $B(\alpha)$  positiv definit. Das Problem hat somit eine Lösung, die sich durch folgenden iterativen Algorithmus berechnen läßt. Setze  $\alpha_n := \alpha_n(t)$  und betrachte das iterative Schema mit Startwert  $\alpha_0(0) = \gamma$ :

$$A\alpha'_{n+1} + B(\alpha_n)\alpha_{n+1} = 0 \quad \text{für } t \in [0, T]. \quad (4.13)$$

## Konvergenzanalyse der semidiskreten Gleichung

Sei  $u \in H^1(Q_T) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$  die Lösung von (4.1) und  $U_h$  die Lösung von (4.10). Zur Fehleranalyse des semidiskreten Problems zerlegen wir den Fehler in

$$U_h - u = (U_h - Eu) + (Eu - u) =: \Theta + \rho,$$

wobei  $E : H^1(\Omega) \rightarrow S_h$  der elliptische Operator, definiert durch

$$(a(|R_\sigma \nabla u(t)|^2)Eu(t), \nabla \chi) = (a(|\nabla R_\sigma u(t)|^2)\nabla u(t), \nabla \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad \text{für fast alle } t \in (0, T], \quad (4.14)$$

ist.

**Lemma 4.1.**  $U_h(t)$  erfülle (4.10)-(4.12). Dann gilt

$$\sigma^{\frac{3}{2}} \|\rho(t)\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla \rho(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \sigma^{-1} h^2 |u|_{H^2(\Omega)}, \quad (4.15)$$

$$\sigma^{\frac{5}{4}} \|\rho_t(t)\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla \rho_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \sigma^{-\frac{5}{2}} h^2 \left( |u_t|_{H^2(\Omega)} + \sigma^{-1} |u|_{H^2(\Omega)} \right) \quad (4.16)$$

für  $t \in (0, T]$  und Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , die unabhängig von  $h$  sind.

*Beweis:*

Wir teilen den Beweis in zwei Schritte auf. Die Gleichungen (4.15) und (4.16) werden nacheinander bewiesen. Die Bezeichnung der Konstanten  $C$  wird nicht geändert, solange sie unabhängig von  $\sigma$  und  $h$  ist.

*Erste Gleichung*

Mit Hilfe von (4.5) erhalten wir für  $\chi \in S_h$ :

$$\begin{aligned} C\sigma \|\nabla(Eu - u)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (a(|\nabla R_\sigma u|^2)\nabla(Eu - u), \nabla(Eu - u)) \\ &= (a(|\nabla R_\sigma u|^2)\nabla(Eu - u), \nabla(\chi - u)) \\ &\leq \|\nabla(Eu - u)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - \chi)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

und das Ersetzen von  $\chi$  durch den Standardinterpolanten  $\Pi_h u$  von  $u$  ergibt  $\|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sigma^{-1} h |u|_{H^2(\Omega)}$  und somit den ersten Teil von (4.15).

Das Betrachten des dualen Problems

$$-\operatorname{div}(a(|\nabla R_\sigma u|^2)\nabla \psi) = -\nabla a(|\nabla R_\sigma u|^2) \cdot \nabla \psi - a(|\nabla R_\sigma u|^2)\Delta \psi = \phi, \quad \psi = 0 \text{ für } \partial\Omega$$

ergibt mit Hilfe der Ungleichung von Poincaré

$$C\sigma \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (a(|\nabla R_\sigma u|^2)\nabla \psi, \nabla \psi) = (\phi, \psi) \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$$

und somit  $\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sigma^{-1} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$ . Weiterhin erhalten wir mit (4.5)

$$\begin{aligned} \sigma \|\psi\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\sigma \|\Delta \psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|a(|\nabla R_\sigma u|^2)\Delta \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\phi + \nabla a(|\nabla R_\sigma u|^2)\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + C \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla a(|\nabla R_\sigma u|^2)\|_{L^\infty} \\ &\leq C(1 + \sigma^{-\frac{1}{2}}) (\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq C\sigma^{-\frac{3}{2}} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

und das duale Problem getestet mit  $\chi = \Pi_h \psi$  ergibt mit (4.14)

$$\begin{aligned} (Eu - u, \phi) &= (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \psi, \nabla(Eu - u)) = (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla(Eu - u), \nabla(\psi - \Pi_h \psi)) \\ &\leq Ch \|\nabla Eu - u\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C\sigma^{-\frac{5}{2}} h^2 |u|_{H^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mit  $\phi = Eu - u$  folgt der zweite Teil von (4.15).

*Zweite Gleichung*

Differenzieren von (4.14) in der Zeit ergibt:

$$(a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \rho_t, \nabla \chi) + (a(|\nabla R_\sigma u|^2)_t \nabla \rho, \nabla \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h$$

und somit

$$\begin{aligned} C\sigma \|\nabla \rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \rho_t, \nabla \rho_t) \\ &= (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \rho_t, \nabla(\chi - u_t)) + (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \rho_t, \nabla(Eu_t - \chi)) \\ &= (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \rho_t, \nabla(\chi - u_t)) - (a(|\nabla R_\sigma u|^2)_t \nabla \rho, \nabla(Eu_t - \chi)) \\ &\leq C \|\nabla \rho_t\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\chi - u_t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C\sigma^{-\frac{1}{2}} \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} (\|\nabla(Eu_t - u_t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_t - \chi)\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Das Setzen von  $\chi = \Pi_h u_t$  und die Benutzung der Young'schen Ungleichung führen zu

$$\begin{aligned} \sigma \|\nabla \rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq Ch |u_t|_{H^2(\Omega)} \|\nabla \rho_t\|_{L^2(\Omega)} + C\sigma^{-\frac{3}{2}} h^2 |u_t|_{H^2(\Omega)}^2 + (C\sigma^{-2} \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\sigma}{4} \|\nabla \rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq C\sigma^{-1} h^2 |u_t|_{H^2(\Omega)}^2 + C\sigma^{-\frac{3}{2}} h^2 |u_t|_{H^2(\Omega)}^2 + C\sigma^{-4} h^2 |u|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

wobei wir  $\|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\sigma^{-1} |u|_{H^2(\Omega)}$  aus dem ersten Teil des Beweises benutzt haben. Somit haben wir den zweiten Teil der zweiten Gleichung (4.16) gezeigt.

Wir betrachten das duale Problem

$$-\operatorname{div}(a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \psi) = \phi \quad \text{mit} \quad \psi = 0 \text{ für } \partial\Omega$$

und erhalten

$$\begin{aligned} (\rho_t, \phi) &= (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \rho_t, \nabla \psi) = (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla \rho_t, \nabla(\psi - \chi)) \\ &\quad + (a(|\nabla R_\sigma u|^2)_t \nabla \rho, \nabla(\psi - \chi)) - (a(|\nabla R_\sigma u|^2)_t \nabla \rho, \nabla \psi). \end{aligned}$$

Setze  $\chi = \Pi_h \psi$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} |(\rho_t, \phi)| &\leq Ch \|\nabla \rho_t\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} + Ch\sigma^{-\frac{1}{2}} (\|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)} + \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\leq Ch^2 \sigma^{-\frac{5}{4}} \left( |u_t|_{H^2(\Omega)}^2 + \sigma^{-1} |u_t|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \sigma^{-\frac{5}{2}} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + Ch\sigma^{-\frac{1}{2}} \left( h\sigma^{-1} \sigma^{-\frac{5}{2}} |u|_{H^2(\Omega)}^2 + h\sigma^{-1} \sigma^{-1} \right) \|\phi\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

und mit  $\phi = \rho_t$  folgt

$$\|\rho_t\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sigma^{-\frac{15}{4}} h^2 \left( |u_t|_{H^2(\Omega)} + \sigma^{-1} |u|_{H^2(\Omega)} \right)$$

und somit der erste Teil von (4.16).

□

**Lemma 4.2.** *Für den Operator  $E$  gilt*

$$\|\nabla Eu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left( \sigma^{-1} \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.17)$$

mit einer Konstanten  $C > 0$ , die nicht von  $\sigma$  oder  $h$  abhängt.

*Beweis:* Aus der Ungleichung

$$\|\nabla \chi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{h} \|\nabla \chi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \chi \in S_h,$$

[15] (S.111 ff) folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla (Eu - \Pi_h u)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \frac{1}{h} \|\nabla (Eu - \Pi u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{h} \left( \|\nabla (Eu - u)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla (u - \Pi u)\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Addition von  $\|\nabla \Pi_h u\|_{L^\infty(\Omega)}$  auf beiden Seiten, Lemma (4.15), Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\|\nabla (Eu - \Pi_h u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \Pi_h u\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \|\nabla Eu\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und

$$\|\nabla \Pi_h u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

zeigen die Behauptung. □

**Satz 4.1.2.** *Seien  $U_h(t)$  und  $u(t)$  die Lösungen der Probleme (4.10)-(4.12) bzw. (4.1) mit der Regularitätsannahme aus (4.1.1). Dann gilt*

$$\|U_h(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|U_h(0) - u_0\|_{L^2(\Omega)} + e^{C(\sigma)h^2}.$$

Hier bezeichnet  $C(\sigma) := C\sigma^{-3}$  eine von  $\sigma$  abhängige Konstante.

*Beweis:* Betrachte  $\Theta = U_h - Eu$  und

$$\begin{aligned} (\Theta_t, \chi) + (a(|\nabla R_\sigma U_h|^2) \nabla \Theta, \nabla \chi) &= -(Eu_t, \chi) - (a(|\nabla R_\sigma U_h|^2) \nabla Eu, \nabla \chi) \\ &= -(u_t, \chi) - (a(|\nabla R_\sigma u|^2) \nabla u, \nabla \chi) - (Eu_t, \chi) - (a(|\nabla R_\sigma U_h|^2) \nabla Eu, \nabla \chi) \\ &= -(\rho_t, \chi) + ((a(|\nabla R_\sigma u|^2) - a(|\nabla R_\sigma U_h|^2)) \nabla Eu, \nabla \chi), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaft (4.14) benutzt haben.

Mit  $\chi = \Theta$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\Theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\sigma \|\nabla \Theta\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla Eu\|_{L^\infty(\Omega)} \|u - U_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \Theta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left( \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma^{-2} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Theta\|_{L^2(\Omega)}^2) \right) \\ &\quad + C\sigma \|\nabla \Theta\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen (4.15)-(4.17) und Integrieren in der Zeit ergeben:

$$\begin{aligned} \|\Theta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\leq \|\Theta(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^T \|\nabla \rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + C \int_0^T \left( \sigma^{-2} |u|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \left( \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Theta(0)\| &\leq \|P_h^0 u(0) - u(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|Eu(0) - u(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|P_h^0 u(0) - u(0)\|_{L^2(\Omega)} + C\sigma^{-1}h^2|u(0)|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

zeigt zusammen mit dem diskreten Gronwall-Lemma die Behauptung.

□

## Konvergenzanalyse der vlldiskreten Gleichung

Für  $0 \leq n \leq T_N$  sei  $t^n := n\tau$ , wobei  $\tau \in (0, 1)$ , so daß  $T_N \in \mathbb{N}$  und  $T = T_N\tau = t^{T_N}$  gilt. Setze  $u^n := u(t^n, x)$  und sei  $I_n := (t^n - t^{n-1})$  und  $\partial^\tau u^n := \tau^{-1}(u^n - u^{n-1})$ . Wir betrachten nun das vollständig diskretisierte Verfahren

$$\alpha^0 = \gamma, \quad A \frac{\alpha^m - \alpha^{m-1}}{\tau} + B(\alpha^m)\alpha^m = 0.$$

Dieses ist äquivalent zur schwachen Formulierung

$$(\partial^\tau U^n, \chi) + (a(|\nabla R_\sigma U^n|^2) \nabla U^n, \nabla \chi) = 0 \quad \forall \chi \in S_h \quad (4.18)$$

mit  $1 \leq n \leq T_N$ ,

$$\begin{aligned} U^n &\in S_h, \\ U^0 &:= P_h u. \end{aligned}$$

**Lemma 4.3.** *Die Lösung  $U^n$  von (4.18) existiert.*

*Beweis:* Durch die Multiplikation der Gleichung (4.18) mit  $2\tau$  wird die Abbildung  $G : S_h \rightarrow S_h$ , definiert durch

$$(G(U^n), \chi) := 2(U^n - U^{n-1}, \chi) + 2\tau (a(|\nabla R_\sigma U^n|^2) \nabla U^n, \nabla \chi),$$

eingeführt. Diese Abbildung  $G$  erfüllt die Annahmen des Brouwer'schen Fixpunktsatzes [49](Seite 34), da

$$(G(U), U) \geq (1 + 2\sigma\tau) \|U\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|U^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$$

für  $U \in \{V : \|V\| \geq \|U^{n-1}\|\}$  und besitzt einen Fixpunkt. Sukzessive Anwendung des Arguments für  $1 \leq T_N$  ergibt die Behauptung. □

**Satz 4.1.3.** *(Konvergenzrate)*

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|U_h^0 - u^0\|_{L^2(\Omega)} + C e^{C(\sigma)} |u|_{H^2(\Omega)} (h^2 + \tau) \quad \text{für alle } t_n \in (0, T].$$

Die Konstante  $C(\sigma)$  hängt polynomial von  $\sigma$  ab.

*Beweis:* Setzen von  $\theta^n := U^n - Eu^n$  führt zu

$$\begin{aligned} (\partial^\tau \theta^n, \chi) &+ (a(|\nabla R_\sigma U^n|^2) \nabla \theta^n, \nabla \chi) \\ &= -(\partial^\tau Eu^n, \chi) - (a(|\nabla R_\sigma U^n|^2) \nabla Eu^n, \nabla \chi) \\ &= -(\partial^\tau Eu^n - u_t^n, \chi) - ([a(|\nabla R_\sigma U^n|^2) - a(|\nabla R_\sigma u^n|^2)] \nabla Eu^n, \nabla \chi) \\ &\quad - (u_t^n, \chi) - (a(|\nabla R_\sigma u^n|^2) \nabla Eu^n, \nabla \chi) \\ &= -(\partial^\tau u^n - u_t^n, \chi) - ([a(|\nabla R_\sigma U^n|^2) - a(|\nabla R_\sigma u^n|^2)] \nabla Eu^n, \nabla \chi) - (\partial^\tau \rho^n, \chi), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Orthogonalität (4.14) ausgenutzt haben.

Setzen von  $\chi := \theta^n$  führt zu

$$\begin{aligned} \partial^\tau \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\sigma \|\nabla \theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\sigma^{-2} \left( \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &+ C \left( \|\partial^\tau u^n - u_t^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C\sigma^{-1} \|\partial^\tau \rho^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt

$$(1 - C\tau\sigma^{-3}) \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau R_n$$

mit

$$R_n := \sigma^{-2} \left( \|\rho^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial^\tau u^n - u_t^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma^{-1} \|\partial^\tau \rho^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

und für  $\tau$  klein genug ( $\tau < \sigma^3$ ) ergibt sich

$$\|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + C\sigma^{-3}\tau) \|\theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau R_n.$$

Rekursive Anwendung ergibt

$$\|\theta^n\|^2 \leq (1 + C\sigma^{-3}\tau)^n \|\theta^0\|^2 + C\tau \sum_{j=1}^n (1 + C\tau)^{n-j} R_j \leq C\sigma^{-3n} \left( \|\theta^0\|^2 + \tau \sum_{j=1}^n R_j \right)$$

für  $t_n \in [0, T]$ . So folgt aus  $\|\rho^n\| \leq C(u)\sigma^{-\frac{5}{2}}h^2$

$$\|\partial^\tau \rho\| = \tau^{-1} \left\| \int_{I_n} \rho_t dt \right\| \leq C(u)\sigma^{-\frac{5}{2}}h^2$$

und

$$\|\partial^\tau u^n - u_t^n\| = \tau^{-1} \left\| \int_{I_n} (s - t_n) u_{tt}(s) ds \right\| \leq C(u)\tau,$$

so daß gilt

$$R_n \leq C(u)\sigma^{-\frac{5}{2}}(h^2 + \tau^2).$$

Somit folgt die behauptete Konvergenzrate.

□

## 4.2 CGFEM und Quasinormabschätzungen

Sei  $T < \infty$  der Endzeitendpunkt,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein polyhedrales Gebiet ( $N=2$ ) und  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  der Raumzeitzyylinder. In diesem Abschnitt werden wir das folgende Problem mit äußeren Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{n}$  an  $\partial\Omega$  betrachten.

Finde  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^M$ , ( $M=1$ ), so daß

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(\mathbf{p}_\delta(\nabla u)) &= 0 && \text{in } Q_T, \\ \mathbf{p}_\delta(\nabla u) \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T], \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dabei ist  $\mathbf{p}_\delta$  der Gradient eines konvexen  $C^1$ -Potentials, d.h.

$$\nabla\phi_\delta = \mathbf{p}_\delta$$

mit der Wachstumsbedingung

$$c(|s|^{1+\delta} - 1) \leq \phi_\delta(s) \leq C(|s|^{1+\delta} + 1) \quad (4.20)$$

für zwei Konstanten  $C > c > 0$  und  $\delta \in (0, 1)$ . Zusätzlich soll  $\mathbf{p}_\delta$  die Struktur

$$\sum_{i,k}^N \sum_{j,l}^M \frac{\partial(\mathbf{p}_\delta(A))_{ij}}{\partial A_{kl}} B_{ij} B_{kl} \geq c(\kappa + |A|)^{\delta-1} |B|^2 \quad \text{für } A, B \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

für  $\kappa > 0$  besitzen. Wir bezeichnen mit  $u(x, t)$  die schwache Lösung im Sinne von

$$(u_t, \phi) + (\mathbf{p}_\delta(\nabla u), \nabla\phi) = 0 \quad \forall \phi \in W^{1,1+\delta}(\Omega) \quad \text{für fast alle } t \in [0, T] \quad (4.21)$$

mit  $u_0 \in W^{1,1+\delta}(\Omega)$ .

Vorbereitend auf die folgenden Kapitel wird in diesem Abschnitt die volldiskrete Approximation des Problems (4.19) behandelt. Dabei wird im Ort eine kontinuierliche Finite-Element-Methode (auch Continuous Galerkin Finite Element Method, CGFEM) benutzt. In der Zeit wird mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens diskretisiert.

Im Fall des elliptisch degenerierten  $p$ -Laplace sind keine optimalen Fehlerabschätzungen in Sobolevräumen oder gewichtete Sobolevräume zu erreichen. Dies motiviert Abschätzungen mit Hilfe geeigneterer Normen. J.W. Barrett und W.B. Liu führten Quasinormen  $\|\cdot\|_{(\nabla u)}$  zur Fehlerabschätzung degenerierter Probleme ein, cf. [11], [10], [37]. Für eine degenerierte Funktion  $S$  mit  $p$ -Struktur gilt die Relation

$$\|\nabla u - \nabla U\|_{(\nabla u)}^2 \approx \int_{\Omega} (S(\nabla u) - S(\nabla U)) (\nabla u - \nabla U) \, dx$$

mit  $1 < p < \infty$ , und somit sind Abschätzungen der Bestapproximation bzgl. dieser Quasinorm möglich, d.h.

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{(\nabla u)} \leq c \inf_{v \in S_h} \|\nabla u - \nabla v\|_{(\nabla u)},$$

wobei  $u$  die schwache Lösung und  $u_h$  die Finite-Element-Approximation von  $u$  im endlich dimensionalen Raum der Finiten Elemente  $S_h$ , bestehend aus stückweise stetigen Funktionen,

ist. In [27] wurde die Theorie der Finiten-Elemente-Interpolations-Fehlerabschätzungen für Quasinormen verallgemeinert und das Resultat

$$\| \nabla u - \nabla v_h \|_{(\nabla u)}^2 \leq ch^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} |\nabla^2 u|^2 dx$$

bewiesen. In einer Reihe von Arbeiten wurden zur Abschätzung von a priori- und a posteriori-Fehlerabschätzungen Quasinormen verwendet, siehe [27], [36], [37], [38]. In diesen Arbeiten wurden optimale Fehlerraten bzgl. der Quasinorm, d.h. in der Form

$$\| \nabla u - \nabla u_h \|_{(\nabla u)}^2 \leq ch^2,$$

hergeleitet. Für parabolische Gleichungen sind nur suboptimale Abschätzungen in der Zeit hergeleitet worden, wie

$$\| u - u_k \|_{l^\infty(I_k, L^2(\Omega))}^2 + \| \nabla u - \nabla u_k \|_{l^2(I_k, L^p(\Omega))}^2 \leq ck^\alpha, \quad \alpha \in (0, 0.5)$$

mit der Lösung  $u$  des parabolischen Problems mit  $p$ -Struktur und  $u^k$  der zeitdiskreten Lösung gewonnen aus dem impliziten Euler-Verfahren.

## Notation

Sei weiterhin  $N = 2, M = 1$ . Zusätzlich zur Notation aus dem vorherigen Kapitel benötigen wir eine Quasinorm

$$\| \nabla v \|_{(\nabla w)} := \left( \int_{\Omega} (\kappa + |\nabla w| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla v|^2 + |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir definieren zudem für  $\kappa > 0$  die Funktion  $\mathbf{P}_\delta : \mathbb{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times M}$  durch

$$\mathbf{P}_\delta(B) := (\kappa + |B|)^{\frac{\delta-1}{2}} B$$

und vermerken, daß für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{N \times M}$  gilt ([26](Lemma 4.1))

$$c|A - B|^2 (\kappa + |B| + |A|)^{\delta-1} \leq (\mathbf{p}_\delta(A) - \mathbf{p}_\delta(B))(A - B) \quad (4.22)$$

$$(\mathbf{p}_\delta(A) - \mathbf{p}_\delta(B))(A - B) \leq C|\mathbf{P}_\delta(A) - \mathbf{P}_\delta(B)|^2 \quad (4.23)$$

$$(\mathbf{p}_\delta(A) - \mathbf{p}_\delta(B))(A - C) \leq \epsilon |\mathbf{P}_\delta(A) - \mathbf{P}_\delta(B)|^2 + C_\epsilon |\mathbf{P}_\delta(A) - \mathbf{P}_\delta(C)|^2 \quad (4.24)$$

mit Konstanten  $c, C > 0$ , die nur von  $\delta$  abhängen und mit einer Konstanten  $C_\epsilon$ , die noch zusätzlich von  $\epsilon > 0$  abhängt. Es sei vermerkt, daß die folgende Ungleichung gilt:

$$(\lambda + \mu)^{p-2} \mu \nu \leq \delta (\lambda + \mu)^{p-2} \mu^2 + c_\delta (\lambda + \nu)^{p-2} \nu^2. \quad (4.25)$$

Ihre Gültigkeit wurde zum Beispiel in [11] bewiesen.

## Diskretisierung

Für  $0 \leq n \leq T_N$  setzen wir  $t^n := n\tau$ , wobei  $\tau$  die Schrittweite in  $t$ -Richtung ist,  $T := t^{T_N}$ ,  $u^n(x) := u(x, t^n)$ , und für  $1 \leq n \leq T_N$  sei  $I_n := (t^{n-1}, t^n)$ ,  $\bar{u} := \frac{1}{\tau} \int_{I_n} u$ ,  $\bar{u}^0 := u^0$  und  $\partial u^n := \frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1})$ . Das vollständig diskretisierte Problem (4.19) ist gegeben durch: Finde die schwache Lösung  $U^n$  von

$$(\partial^\tau U^n, \chi) + (\mathbf{p}_\delta(\nabla U^n), \nabla \chi) = 0 \quad \forall \chi \in S_h \quad (4.26)$$

mit  $1 \leq n \leq T_N$ ,

$$U^n \in S_h,$$

$$U^0 := P_h^0 u_0,$$

wobei  $P_h^0$  ein geeigneter Interpolationsoperator, siehe z.B. [48], ist. Wir definieren  $U : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^M$  durch

$$U(x, t) := \begin{cases} U^0(x) & \text{für } t = 0, \\ U^n(x) & \text{für } t_{n-1} < t \leq t_n. \end{cases}$$

## Existenz, Eindeutigkeit und a priori-Abschätzungen

In diesem Abschnitt wird die diskrete Lösung charakterisiert.

**Lemma 4.4.** *Das Problem (4.26) besitzt eine eindeutige Lösung  $\{U^n\}_{0 \leq n \leq T_N} \subset S_h$ .*

*Beweis:*

Wie im vorangegangenen Abschnitt, lässt sich  $U^n$  durch

$$U^n(x) := \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \Phi_i(x)$$

darstellen. Somit läßt sich die Gleichung (4.26) umschreiben zu

$$A\alpha^n + \tau B(\alpha^n)\alpha^n = A\alpha^{n-1}.$$

Aus der positiven Definitheit der Matrizen  $A$  und  $\{B(\alpha^n)\}$  folgt die Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung.

□

**Lemma 4.5.** *Unter der Bedingung (4.20) folgt, daß*

$$\sup_{1 \leq n \leq T_N} \|\nabla U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c(U^0)$$

*gilt.*

*Beweis:* Wir folgen den Ideen aus [24] mit  $D^{\Delta x}U^n(x) := \frac{1}{|\Delta x|} (U^n(x + \Delta x) - U^n(x))$  für  $\Delta x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ . Multiplizieren von (4.26) mit  $D^{-\Delta x}D^{\Delta x}U^n$  ergibt

$$(\partial D^{\Delta x}U^n, D^{\Delta x}U^n) + (D^{\Delta x}(\mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)), D^{\Delta x}\nabla U^n) = 0$$

und es folgt

$$\frac{1}{2}\partial^\tau \|D^{\Delta x}U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\|D^{\Delta x}(\mathbf{P}_\delta(\nabla U^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Summieren über  $\tau \sum_{n=1}^{N_h}$  ergibt

$$\sup_n \|D^{\Delta x}U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \sum_{n=1}^{N_h} \|D^{\Delta x}(\mathbf{P}_\delta(\nabla U^n))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|D^{\Delta x}U^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Mit der Eigenschaft der Differenzenquotienten folgt die Behauptung.

□

## Konvergenzrate

Nun werden Aussagen der asymptotischen Konvergenz der FEM-Approximation hergeleitet. Diese Aussagen werden für den nächsten Abschnitt entscheidend sein, tragen aber ein eigenständiges Interesse. So laßen sich unter zusätzlichen Regularitätsbedingungen optimale Konvergenzraten herleiten.

**Theorem 4.6.** *Sei  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,1+\delta}(\Omega))$  und  $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  die Lösung des Problems (4.19) und  $U^n$  die Lösung des diskreten Problems (4.26). Dann gilt:*

$$\begin{aligned} & \sup_n \|U^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \sum_{n=1}^{T_N} \|P_h^0 u^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \sum_{n=1}^{T_N} \tau \|\mathbf{P}_\delta(\nabla U^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C \sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen

$$u_0 \in W^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,\delta+1}(\Omega)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{p}_\delta(\nabla u_0)) \in L^2(\Omega)$$

$$h^\alpha \leq c\tau \quad \alpha = 1 - \delta$$

erhalten wir die Fehlerabschätzungen

$$\sup_n \|u^n - U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(h^2 + \tau^2), \quad (4.28)$$

die bezogen auf die Quasinorm

$$\|u - U\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + c \int_0^T \|\nabla u - \nabla U\|_{(\nabla u(t))}^2 dt \leq C(h^2 + \tau^2) \quad (4.29)$$

optimal sind. Hier sind  $c, C > 0$  zwei von  $h$  und  $\tau$  unabhängige Konstanten.

*Beweis:*

Setzen von  $E^n := u^n - U^n$  und anschließendes gewichtetes Summieren über  $\tau \sum_{n=0}^{T_N}$  ergibt

$$\tau \sum_{n=1}^{T_N} (\partial^\tau u^n, \chi) + \tau \sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} (\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)), \nabla \chi) dt = 0 \quad \forall \chi \in S_h.$$

Setze  $\chi = P_h^0 E^n$ . Subtraktion von (4.26) von dieser Gleichung ergibt unter Benutzung von

$$(\partial^\tau E^n, P_h^0 E^n) = (\partial^\tau E^n, E^n) + (\partial^\tau E^n, P_h^0 u^n - u^n)$$

und

$$\tau \sum_{n=0}^{T_N} (\partial^\tau E^n, E^n) = \frac{1}{2} \|E^{T_N}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|E^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^{T_N} \|\partial^\tau E^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|E^{T_N}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=0}^{T_N} \|\partial^\tau E^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \left( \mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n), \nabla(u(t) - U^n) \right) dt \\ & \leq \frac{\tau}{2} \sum_{n=1}^{T_N} (\partial^\tau E^n, P_h^0 u^n - u^n) + \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \left( \mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^N), \nabla(u(t) - P_h^0 u^n) \right) dt \\ & + \frac{1}{2} \|E^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^{T_N} \|\partial^\tau E^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \sum_{n=0}^{T_N} \|P_h^0 u^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} \left( \mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^N), \nabla(u(t) - P_h^0 u^n) \right) dt, \end{aligned}$$

wobei wir hier im zweiten Schritt die Cauchy-Ungleichung benutzt haben.

Mit Hilfe von (4.23) und mit der Wahl eines geeigneten  $\epsilon > 0$  folgt

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n), \nabla(u(t) - P_h^0 u^n) \right) & \leq \epsilon \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C(\epsilon) \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

und mit (4.22) folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|E^{T_N}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ \leq C\tau \sum_{n=0}^{T_N} \|P_h^0 u^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Addition von  $\sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla u(t))\|_{L^2(\Omega)}^2$  auf beiden Seiten und Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla u(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \geq \tau \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

auf den zweiten Term der linken Seite, bzw. Anwendung von

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt & \leq \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & + \tau \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

auf den zweiten Term der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} & \sup_n \|E^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\tau \sum_{n=0}^{T_N} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{n=1}^{T_N} \|P_h^0 u^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C \sum_{n=1}^{T_N} \left( \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla u(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \tau \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Dies zeigt die erste Behauptung (4.27).

Wir vermerken, daß unter zusätzlichen Voraussetzungen gilt:

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \int_{I_n} \int_{\Omega} \left| \int_t^{t_n} \partial_t(\mathbf{P}_\delta(\nabla u(s))) ds \right|^2 dx dt \\ &\leq \tau \int_{I_n} \int_{\Omega} \int_t^{t_n} |\partial_t \mathbf{P}_\delta(\nabla u(s))|^2 ds dx dt \\ &\leq \tau^2 \int_{I_n} \int_{\Omega} |\partial_t \mathbf{P}_\delta(\nabla u(t))|^2 dx dt \\ &\leq C\tau^2. \end{aligned}$$

Anwendung der Approximationseigenschaft, cf. [15] (Seite 102ff),

$$\|u - P_h^0 u\|_{H^\beta(\Omega)} \leq h^{\alpha-\beta} \|u\|_{H^\alpha(\Omega)}$$

und (4.24) führen mit [27] zur Abschätzung

$$\sup_n \|E^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(h^2 + \tau^2).$$

Somit erhalten wir die zweite Behauptung (4.28). Die dritte Behauptung (4.29) ergibt sich mit der Relation (4.22) und den Dreiecksungleichungen

$$\sup_{t \in I_n} \|u(t) - U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left( \sup_{t \in I_n} \|u(t) - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_n \|u^n - U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

zusammen mit

$$\sup_{t \in I_n} \|u(t) - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c\tau^2 \|\partial_t u\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2.$$

□

Für den speziellen Fall  $\delta = 0$  und der  $p$ -Struktur

$$\mathbf{p}_0(\nabla A) := \frac{\nabla A}{|\nabla A|}$$

gilt das folgende Lemma:

**Lemma 4.7.** *Unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Theorems gilt für den Fall  $\mathbf{p}_0$ :*

$$\begin{aligned} \sup_n \|U^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \left( \mathbf{p}_0(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_0(\nabla U^n), \nabla(u(t) - U^n) \right) dt & \quad (4.30) \\ \leq C \sum_{n=1}^{T_N} \|P_h^0 u^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} \|\nabla u(t) - \nabla P_h^0 u^n\|_{L^1(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

*Beweis:*

Wie im vorherigen Beweis ergibt das Setzen von  $E^n := u^n - U^n$  mit anschließendem gewichtetem Summieren und die Subtraktion der diskreten Gleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|E^{T_N}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=0}^{T_N} \|\partial^\tau E^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \left( \mathbf{p}_0(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_0(\nabla U^n), \nabla(u(t) - U^n) \right) dt \\ & \leq \frac{\tau}{2} \sum_{n=1}^{T_N} (\partial^\tau E^n, P_h^0 u^n - u^n) + \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \left( \mathbf{p}_0(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_0(\nabla U^N), \nabla(u(t) - P_h^0 u^n) \right) dt \\ & + \frac{1}{2} \|E^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^{T_N} \|\partial^\tau E^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \sum_{n=0}^{T_N} \|P_h^0 u^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \sum_{n=1}^{T_N} \int_{I_n} \left( \mathbf{p}_0(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_0(\nabla U^N), \nabla(u(t) - P_h^0 u^n) \right) dt \end{aligned}$$

nach dem Setzen von  $\chi = P_h^0 E^n$ . Entscheidend ist nun die Abschätzung

$$\langle \mathbf{p}_0(\nabla u(t)), \nabla u(t) - \nabla P_h^0 u(t) \rangle = |\nabla u(t) - \nabla P_h^0 u(t)| \cos(\alpha)$$

bzw.

$$\langle \mathbf{p}_0(\nabla U^n), \nabla u(t) - \nabla P_h^0 u(t) \rangle = |\nabla u(t) - \nabla P_h^0 u(t)| \cos(\alpha')$$

für alle  $x$  und  $t$ . Daraus folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 4.2.1.** *Die Resultate lassen sich einfach für den Fall  $N, M \geq 1$  verallgemeinern. In dieser Arbeit schreibt das Anwendungsproblem die Dimensionen  $N = 2$  und  $M = 1$  vor.*

### 4.3 DGFEM für Quasilineare Gleichungen

Sei  $T < \infty$  der Endzeitendpunkt,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein polyhedrales Gebiet und  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  Raumzeitzyylinder bzw. hier zutreffender der Raumzeitkubus. Das konvexifizierte Problem des Modellproblems fällt in die Klasse des im vorherigen Abschnitt behandelten Problems (4.19). Sei also  $u(x, t)$  die schwache Lösung, so daß für fast alle  $t \in [0, T]$  gilt

$$(u_t, \phi) + (\mathbf{p}_\delta(\nabla u), \nabla \phi) = 0 \quad \forall \phi \in W^{1,p}(\Omega) \quad (4.31)$$

mit  $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ . Wir erinnern daran, daß entscheidend war, daß das Problem  $p$ -Struktur besitzt, d.h.

$$\sum_{j,l=1}^M \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial \mathbf{p}_{\delta,ij}(A)}{\partial A_{kl}} B_{ij} B_{kl} \geq c_1 (\kappa + |A|)^{\delta-1} |B|^2, \quad (4.32)$$

für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{N \times M}$ .

Dieses Problem wurde im vorangehenden Abschnitt mit Hilfe kontinuierlicher Finite Elemente approximiert und es wurden Konvergenzraten bzgl. Quasinormen hergeleitet. In diesem Abschnitt wird die Gleichung nun durch diskontinuierliche Finite Elemente im Ort und durch das implizite Euler-Verfahren in der Zeit vollständig diskretisiert. Das Ziel ist eine Abschätzung des Fehlers bezüglich einer Quasinorm. Diskontinuierliche Galerkin-Methoden wurden zur Nicht-Standard-Approximation elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung von Nitsche [40] eingeführt und später auch zur Behandlung von hyperbolischen Gleichungen verwendet, cf. [21]. Mit der Bezeichnung  $\langle \mathbf{p}_\delta(u_h), \mathbf{n} \rangle$  für das arithmetische Mittel multipliziert mit der äußeren Normalen  $\mathbf{n}$  an  $e$  zeichnen diese Methoden einen zusätzlichen Strafterm aus, der von den Sprüngen  $[[u_h]]$  über innere Kanten  $e$  in Form

$$\sum_{e \subset \Omega} \int_e [[u_h]] (\sigma_e [[u_h]] + \theta \langle \tau(u_h), \mathbf{n} \rangle) ds$$

abhängt. Dabei ist  $\sigma$  ein frei zu wählender Strafparameter und dieser Strafterm erzwingt indirekt die innere Stetigkeit. Die Wahl des Vorzeichens von  $\theta \in \{-1, 1\}$  hängt von der Form der gewählten Methode ab und entspricht im Fall  $\theta = -1$  dem symmetrischen und für  $\theta = +1$  dem asymmetrischen Fall. Verschiedene Strategien sind für den Fall  $\theta \in [0, 1]$  anstelle von  $\theta = \pm 1$  vorgeschlagen worden. In der Arbeit [30] wurde für die Klasse von quasilinearen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbf{p}(x, |\nabla u|)) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g_N \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ f &\in L^2(\Omega), \quad g_N \in L^2(\Gamma_N), \end{aligned}$$

welche die Strukturbedingung

$$c(t-s) \leq \mathbf{p}(t)t - \mathbf{p}(s)s \leq C(t-s), \quad t \geq s \geq 0,$$

für  $0 < c \leq C$  Konstanten erfüllt, dieser verallgemeinerte Fall behandelt. Für diese Klasse von Problemen wurden unter den Regularitätsbedingungen  $u \in C^1(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ ,  $k \geq 2$  in der  $H^1(\Omega)$ -Norm für diskontinuierliche stückweise polynomiale Finite Elemente vom Grad  $d \geq 1$  Konvergenzraten  $O(h^{s-1}/d^{k-\frac{3}{2}})$  hergeleitet.

## Notation und Diskretisierung

Zur Formulierung des diskreten Problems sind einige Vorbereitungen zu treffen. Sei  $T_h$  eine reguläre Triangulierung von  $\Omega$ , vergleiche dazu den ersten Abschnitt dieses Kapitels. Wir ordnen der Triangulierung den Finite-Elemente-Raum

$$S_{dh} := \{ v \in L^2(\Omega) : v \text{ linear auf } \mathcal{T} \in T_h \}$$

zu. Wir lassen also Unstetigkeiten entlang der Elementgrenzen zu. Wir beschränken uns auf den Fall  $N = 2$ ,  $M = 1$ . Weiterhin sei für jedes Element  $\mathcal{T} \in T_h$  eine nichtnegative Zahl  $s_{\mathcal{T}}$  definiert, d.h. der Triangulierung wird der Vektor  $\mathbf{s} := \{ s_{\mathcal{T}} ; \mathcal{T} \in T_h \}$  zugeordnet. Wir definieren den Sobolevraum der stückweis-definierten Funktionen

$$H^{\mathbf{s}}(\Omega, T_h) := \{ v \in L^2(\Omega) ; v|_{\mathcal{T}} \in H^{s_{\mathcal{T}}}(\mathcal{T}) \quad \forall \mathcal{T} \in T_h \}$$

mit der Norm, beziehungsweise der Seminorm

$$\| v \|_{\mathbf{s}, T_h} := \left( \sum_{\mathcal{T} \in T_h} \| v \|_{H^{s_{\mathcal{T}}}(\mathcal{T})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |v|_{\mathbf{s}, T_h} := \left( \sum_{\mathcal{T} \in T_h} |v|_{H^{s_{\mathcal{T}}}(\mathcal{T})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zusätzlich benötigen wir die äquivalente Quasihalbseminorm der stückweis-definierten Funktionen

$$|\nabla v|_{(\nabla w), \mathcal{T}} := \left( \int_{\mathcal{T}} (\kappa + |\nabla w| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für  $\mathcal{T} \in T_h$ ,

$$|\nabla v|_{(\nabla w), T_h} := \left( \sum_{\mathcal{T} \in T_h} |\nabla v|_{(\nabla w), \mathcal{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei  $\mathcal{E}$  die Menge aller offenen Kanten im Fall  $N = 2$ . Abweichend zum CGFEM sind hängende Knoten im DGFEM-Ansatz erlaubt, so daß  $\mathcal{E}$  die kleinste gemeinsame  $(N - 1)$ -dimensionale Kante zweier benachbarter Elemente enthält. Sei weiter  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  die Menge aller Kanten  $e \in \mathcal{E}$ , die echt in  $\Omega$  liegen. Definiere

$$\Gamma_{\text{int}} := \{ x \in \Omega : x \in e \text{ für ein } e \in \mathcal{E}_{\text{int}} \}.$$

Sei  $e \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  gegeben und seien  $i$  und  $j$  so, daß

$$i > j \quad \text{und} \quad e \in \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j.$$

Dann definieren wir den (elementweise nummerierten) Sprung von  $v \in H^1(\Omega; T_h)$  über  $e$  und den Mittelwert von  $v$  auf  $e$  mit

$$[[v]]_e := v|_{\partial \mathcal{T}_i n_e} - v|_{\partial \mathcal{T}_j n_e} \quad \text{und} \quad \langle v \rangle_e := \frac{1}{2} (v|_{\partial \mathcal{T}_i n_e} + v|_{\partial \mathcal{T}_j n_e}).$$

Der Index  $e$  wird nicht weiter mitgeführt, falls aus dem Zusammenhang ersichtlich ist welche Kante gemeint ist.

Sei  $e$  eine  $(N-1)$ -dimensionale Kante von  $\mathcal{T} \in T_h$ . Wir benötigen die folgenden inversen Abschätzungen:

$$\|w\|_{L^2(e)}^2 \leq \frac{C}{h_e} \|w\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 \quad \text{und} \quad \|\nabla w\|_{L^2(e)}^2 \leq \frac{C}{h_e} \|\nabla w\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 \quad (4.33)$$

für alle  $w \in S_{dh}(\Omega, T_h)$ . Dabei bezeichnet  $C > 0$  eine Konstante und  $h_e$  den Durchmesser beziehungsweise die Länge der Kante. Entsprechend gilt für die Quasinormen folgendes Lemma:

**Lemma 4.8.** *Folgende inversen Abschätzungen gelten:*

$$\|w\|_{(\nabla v),e}^2 \leq \frac{C_i}{h_e} \|w\|_{(\nabla v),\mathcal{T}}^2 \quad \|\nabla w\|_{(\nabla v),e}^2 \leq \frac{C_i}{h_e} \|w\|_{(\nabla v),\mathcal{T}}^2, \quad (4.34)$$

für die Kante  $e \subset \mathcal{T} \in T_h$  und eine Konstante  $C_i > 0$ , siehe [30].

Zusätzlich führen wir die Einheitsnormale  $\mathbf{n}$  entlang der Kante  $e$  ein, die von  $\mathcal{T}_i$  nach  $\mathcal{T}_j$  zeigt. Betrachte  $S_{dh}(\Omega, T_h)$  mit der Quasinorm

$$\|v\|_{(\nabla w),\sigma} := \left( \|\nabla v\|_{(\nabla w),T_h}^2 + \sigma \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla w|)^{p-2} \rangle \llbracket v \rrbracket^2 ds \right)^{0.5}.$$

Der diskontinuierliche Strafparameter  $\sigma$  ist definiert durch

$$\sigma|_e = \sigma_e = \frac{\alpha}{h_e},$$

und in unserem Fall ist  $\alpha = 2C_i$ .

**Bemerkung 4.3.1.** *Für andere Verfahren werden speziellere Wahlen von  $\alpha$  benötigen. Im Fall der Verallgemeinerung einer hp-DGFEM Methode mit dem Polynomgrad  $d$  im Element  $\mathcal{T}$  wird der Strafparameter wie folgt gewählt:*

$$\sigma|_e := \alpha \frac{\langle d^2 \rangle_e}{h_e}.$$

Für  $0 \leq n \leq T_N$  setzen wir  $t^n := n\tau$ , wobei  $\tau$  die Schrittweite in  $t$ -Richtung ist,  $T := t^{T_N}$ ,  $u^n(x) := u(x, t^n)$ , und für  $1 \leq n \leq T_N$  sei  $I_n := (t^{n-1}, t^n)$ ,  $\bar{u} := \frac{1}{\tau} \int_{I_n} u dt$ ,  $\bar{u}^0 := u^0$  und  $\partial u^n := \frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1})$ .

Nun wird das Problem (4.31) vollständig diskretisiert:  $U^n$  sei die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} (\partial U^n, \chi) + \sum_{\mathcal{T} \in T_h} \int_{\mathcal{T}} \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n) \cdot \nabla \chi \, dx - \int_{\Gamma_{int}} \langle \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n) \cdot \mathbf{n} \rangle \llbracket \chi \rrbracket \, ds \\ + \sigma \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle \llbracket U^n \rrbracket \llbracket \chi \rrbracket \, ds = 0 \quad \forall \chi \in S_{dh} \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit  $1 \leq n \leq T_N$ ,

$$\begin{aligned} U^n &\in S_{dh}, \\ U^0 &:= P_h^0 u_0, \end{aligned}$$

wobei  $P_h^0$  ein geeigneter Interpolant ist, siehe z.B. [48] oder [30] und [28], so daß für  $u \in H^s(\Omega)$  und  $c$  eine positive Konstante gilt:

$$\int_{e_{\mathcal{T}}} \nabla(P_h^0 u - u) \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{T}} = 0, \quad \forall \mathcal{T} \in T_h,$$

$$\|P_h^0 u - u\|_0 \leq Ch^s \|u\|_s,$$

$$\|\nabla(P_h^0 u - u)\|_0 \leq Ch^{s-1} \|u\|_s,$$

$$\|\nabla^2(P_h^0 u - u)\|_0 \leq Ch^{s-2} \|u\|_s.$$

Zudem benötigen wir das folgende Lemma aus [24](Seite 14, (6.8)):

**Lemma 4.9.** *Habe  $\mathbf{p}_\delta$   $p$ -Struktur dann gilt für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{N \times M}$*

$$|\mathbf{p}_\delta(A) - \mathbf{p}_\delta(B)| \leq C|A - B|(\kappa + |B| + |A|)^{p-2}$$

*für eine von  $A$  unabhängige Konstante  $C > 0$ .*

## Konvergenzraten

Nun wollen wir a priori-Fehlerabschätzungen und die Konvergenzrate in der Quasinorm abschätzen. Dabei ist  $U^n$  die Finite-Elemente-Lösung auf  $[0, T] \times \Omega$ , sie ist stückweise linear bzgl.  $x$  und stückweise konstant bzgl.  $t$ , aber im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt nicht global stetig im Ort. Wir benutzen dabei eine Kurzform für die Integraldarstellung.

**Satz 4.3.2.**  $U^n$  erfülle (4.35). Dann gilt für  $1 < p < 2$

$$\begin{aligned}
& \sup_n \|u^n - U^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla(u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n))\|_{(\nabla u(t))}^2 dt \\
& + c\sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle | [u(t) - U^n] |^2 ds dt \\
& \leq \sum_{n=0}^{T_N} \left( \|P_h^0 u^n - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u^n)\|_{0, T_h}^2 dt \right) \\
& + \|u_0 - P_h^0 u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla u(t)|)^{p-2} \rangle | [u(t) - P_h^0 u^n] |^2 ds dt
\end{aligned}$$

für Konstanten  $c$  und  $C$  unabhängig von  $h$  und  $\tau$ . Der Strafterm genügt dabei  $\sigma = \frac{8C}{h}$ .

*Beweis:*

In diesem Abschnitt werden mithilfe von formalen Testens die angegebenen Fehlerraten hergeleitet. Die einzelnen Schritte können mathematisch mithilfe einer Differenzentechnik begründet werden. Setzen von  $E^n := U^n - u^n$ , zeitliches Mitteln der kontinuierlichen Gleichung (4.31), und Einsetzen von  $\chi = P_h^0 E^n$  ergibt unter Benutzung von

$$(\partial^\tau E^n, P_h^0 E^n) = (\partial^\tau E^n, E^n) + (\partial^\tau E^n, P_h^0 u^n - u^n)$$

und

$$\tau \sum_{n=0}^{T_N} (\partial^\tau E^n, E^n) = \frac{1}{2} \|E^{T_N}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|E^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^{T_N} \|\partial^\tau E^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|E^{T_N}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{T_N} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \int_{I_n} \int_{\mathcal{T}} (\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)) \cdot (\nabla(u(t) - U^n)) dx dt \\
& + \sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle | [u(t) - U^n] [P_h u(t) - U^n] | ds dt \tag{4.36} \\
& + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=0}^{T_N} \|\partial^\tau E^n\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\tau}{2} \sum_{n=1}^{T_N} (\partial^\tau E^n, P_h^0 u^n - u^n) + \|E^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{T_N} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{I_n} \int_T (\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)) \cdot (\nabla (u(t) - P_h^0 u^n)) \, dx \, dt \\
&\quad + \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)) \cdot \mathbf{n} \rangle [P_h^0 u(t) - U^n] \, ds \, dt
\end{aligned}$$

nach einfachen Umformungen und der Anwendung der Youngschen Ungleichung. Hier haben wir ausgenutzt, daß die Lösung des kontinuierlichen Problems glatt ist und haben

$$\sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle [u(t)] [P_h u(t) - U^n] \, ds \, dt = 0$$

zur linken Seite addiert.

Im nächsten Schritt sollen die einzelnen Terme der linken Seite geeignet nach unten bzw. die Terme der rechten Seite nach oben abgeschätzt werden. Dazu führen wir die Abkürzungen  $I_l + II_l + III_l + IV_l \leq I_r + II_r + III_r + IV_r$  für die Relation (4.36) ein. Es folgt

$$\begin{aligned}
II_l &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{I_n} \int_T (\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)) \cdot (\nabla (u(t) - U^n)) \, dx \, dt \\
&\geq c \int_{I_n} \| \mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n) \|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt
\end{aligned}$$

und für  $III_l$  folgt mit der Young'schen Ungleichung, daß gilt

$$\begin{aligned}
III_l &= \sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle |[u(t) - U^n]|^2 \, ds \, dt \\
&\quad + \sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle |[u(t) - U^n]| |[P_h^0 u(t) - u(t)]| \, ds \, dt \\
&\geq \sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle |[u(t) - U^n]|^2 \, ds \, dt \\
&\quad - \sigma \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle \left( \frac{1}{2} |[u(t) - U^n]|^2 + \frac{1}{2} |[P_h^0 u(t) - u(t)]|^2 \right) \, ds \, dt \\
&\geq \frac{\sigma}{2} \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle |[u(t) - U^n]|^2 \, ds \, dt \\
&\quad - \frac{\sigma}{2} \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{p-2} \rangle |[P_h^0 u(t) - u(t)]|^2 \, ds \, dt.
\end{aligned}$$

Der Term  $I_r$  wird wie im vorgehenden Abschnitt behandelt und wir erhalten für  $III_r$

$$\begin{aligned} III_r &= \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \int_{I_n} \int_{\mathcal{T}} (\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)) \cdot (\nabla (P_h^0 u(t) - U^n)) \, dx \, dt \\ &\leq \frac{c}{2} \int_{I_n} \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + C \|\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla P_h^0 u(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung des Terms  $IV_r$  benötigen wir ein paar vorbereitende Schritte. Mit den Bezeichnungen  $\mathcal{T} \cap e$  und  $\mathcal{T}' \cap e$  für die Elemente, die sich die Kante  $e \in \Gamma_{int}$  teilen, definieren wir

$$\begin{aligned} O(\mathcal{T}) &:= \left\{ \bigcup \mathcal{T}' ; \mathcal{T}' \in \mathcal{T}_h, \bar{\mathcal{T}}' \cap \bar{\mathcal{T}} \neq \emptyset \right\}, \\ L(\mathcal{T}) &:= \{e ; \exists \mathcal{T}' \in O(\mathcal{T}) \text{ mit } e \subset \mathcal{T}'\}, \\ A_e &:= |\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)|^2|_{\mathcal{T}_e}, \end{aligned}$$

und  $e^* \in L(\mathcal{T})$  durch

$$|A|_{e^*} := \max_{e \in L(\mathcal{T})} |A_e|.$$

Nun wollen wir den Term  $IV_r$  abschätzen:

$$\begin{aligned} IV_r &\leq \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle |\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)| \rangle | [P_h^0 u(t) - U^n] | \, ds \, dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{T_N} \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \int_{I_n} \int_e \langle |\mathbf{p}_\delta(\nabla U^n) - \mathbf{p}_\delta(\nabla u(t))| \rangle | [P_h^0 u(t) - U^n] | \, ds \, dt \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{T_N} \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \int_{I_n} \int_e |\mathbf{p}_\delta(\nabla U^n) - \mathbf{p}_\delta(\nabla u(t))|_{e^*} | [P_h^0 u(t) - U^n] | \, ds \, dt \\ &\leq C \sum_{n=0}^{T_N} \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \int_{I_n} \int_e \frac{|\nabla U^n - \nabla u(t)|_{e^*}}{\langle (\kappa + |\nabla U^n| + |\nabla u(t)|)^{\frac{1-\delta}{2}} \rangle} \frac{| [P_h^0 u(t) - U^n] |}{\langle (\kappa + |\nabla U^n| + |\nabla u(t)|)^{\frac{1-\delta}{2}} \rangle} \, ds \, dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{T_N} \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \int_{I_n} \int_e \frac{1}{\beta} |\mathbf{P}_\delta(\nabla U^n) - \mathbf{P}_\delta(\nabla u(t))|_{e^*}^2 + C\beta \frac{| [P_h^0 u(t) - U^n] |^2}{\langle (\kappa + |\nabla U^n| + |\nabla u(t)|)^{1-\delta} \rangle} \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Nun wollen wir  $\beta$  in Abhängigkeit zu  $\sigma$  bestimmen. Mit Lemma 4.8 ergibt sich, daß gilt

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \int_e \langle |\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)|^2 \rangle \, ds &\leq 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \int_e |\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)|_{e^*}^2 \, ds \\ &\leq \frac{C}{h} \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \max_{\mathcal{T}: e \subset \mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} |\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)|^2 \, dx, \end{aligned}$$

und da kein Element mehr als einen hängenden Kanten hat, folgt, daß kein Element  $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$  mehr als  $2N \cdot 2^{N-1} = 2^N N$  Seiten besitzt, für  $N = 2$ . Mit der Notation  $C_N :=$

$\max\{2^N N, (N+1)N\} = 2^N N$  folgt weiter, daß

$$\frac{C}{h} \sum_{e \in \mathcal{E}_{int}} \max_{T: e \subset T} \int_T |\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)|^2 dx \leq \frac{C_N C}{h} \sum_T \int_{T \in T_h} |\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)|^2 dx.$$

Außerdem gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{Int}} \frac{||[P_h^0 u(t) - U^n]||^2}{\langle (\kappa + |\nabla U^n| + |\nabla u(t)|)^{1-\delta} \rangle} ds dt \\ & \leq 2 \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{Int}} \frac{||[P_h^0 u(t) - u(t)]||^2}{\langle (\kappa + |\nabla U^n| + |\nabla u(t)|)^{1-\delta} \rangle} + \frac{||[u(t) - U^n]||^2}{\langle (\kappa + |\nabla U^n| + |\nabla u(t)|)^{1-\delta} \rangle} ds dt \\ & \leq 2 \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{Int}} \frac{||[P_h^0 u(t) - u(t)]||^2}{\langle (\kappa + |\nabla u(t)|)^{1-\delta} \rangle} + \frac{||[u(t) - U^n]||^2}{\langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{1-\delta} \rangle} ds dt. \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir den Term  $IV_r$  abschätzen, indem wir

$$\beta := 2 \frac{CC_N}{h}, \quad 8C\beta < \sigma$$

setzen und

$$\begin{aligned} IV_r & \leq \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\mathbf{p}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{p}_\delta(\nabla U^n)) \cdot \mathbf{n} \rangle [P_h^0 u(t) - U^n] ds dt \\ & \leq \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \left( \sum_{T \in T_h} \int_T |\mathbf{P}_\delta(\nabla u(t)) - \mathbf{P}_\delta(\nabla U^n)|^2 dx + \int_{\Gamma_{Int}} \frac{\sigma}{4} \frac{||[u(t) - U^n]||^2}{\langle (\kappa + |\nabla U^n|)^{1-\delta} \rangle} ds \right) dt \\ & \quad + C \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \sigma \langle (\kappa + |\nabla u(t)|)^{p-2} \rangle ||[u(t) - P_h^0 u(t)]||^2 ds dt. \end{aligned}$$

erhalten. Gemeinsam führen diese Ungleichungen auf die Behauptung, indem man die ersten beiden Terme in die rechten Seite von der Ursprungsgleichung (4.36) verschmelzt.

□

**Bemerkung 4.3.3.** *Unter genügenden Regularitätsbedingungen  $u \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$  mit  $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , erhalten wir die Abschätzung*

$$C \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} \int_{\Gamma_{int}} \langle (\kappa + |\nabla u(t)|)^{p-2} \rangle \sigma ||[u(t) - P_h^0 u^n]||^2 ds dt \leq C(h^2 + \tau^2)$$

und aus den Resultaten des vorangehenden Kapitels die Konvergenzrate

$$\begin{aligned} & \sup_n ||u^n - U^n||_{L^2(\Omega)}^2 + c \sum_{n=0}^{T_N} \int_{I_n} ||\nabla(u(t) - U^n)||_{(\nabla u(t))}^2 dt \\ & \leq C(h^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.3.4.** *Wie im vorangehenden Kapitel lassen sich die Ergebnisse unter Abänderung der dimensionsabhängigen Größen weitgehend auf den Fall  $M \geq 1$ ,  $N \geq 1$  verallgemeinern.*

**Bemerkung 4.3.5.** *Für den Fall  $\delta = 0$  erweist sich die Fehlerabschätzung als schwierig. Sollte die Lage der Sprungstellen des kontinuierlichen Problems bekannt sein, erweisen sich die diskontinuierliche Finite-Elemente-Methode als besonders gut geeignet. In [46] wird anhand von Beispielen die bessere Approximationseigenschaften der diskontinuierliche Finiten-Elemente-Methode für elliptische Probleme experimentell gezeigt.*

## 4.4 Modellproblem mit superlinearem Wachstum

### Formulierung des Hilfsproblems

Sei  $\delta > 0$ . Betrachte das Hilfsproblem gegeben durch: Finde  $u : Q_T := \Omega \times (0; T] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(\mathbf{q}_\delta(\nabla u)) &= 0 && \text{in } Q_T, \\ u(0, \cdot) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T], \end{aligned} \tag{4.37}$$

wobei

$$\mathbf{q}_\delta(\nabla u) = \left( \frac{\lambda |\nabla u|^{2\delta} + \mu |\nabla u|^{3\delta+1}}{\lambda + |\nabla u|^{2(\delta+1)}} \nabla u \right).$$

Folgende Voraussetzungen sollen erfüllt sein:

- (H1)  $u_0(x) \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega; \mathbb{R})$  mit  $0 \leq u_0 \leq 1$  fast überall in  $\Omega$ ,
- (H2)  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein Polygonebiet mit  $N = 2$ ,
- (H3)  $T \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\}$ .

Im allgemeinen besitzt dieses Problem keine Lösung im klassischen Sinne und motiviert die folgende Definition:

**Definition 4.10.** Eine Funktion  $u \in L^\infty(0, T ; W^{1,1+\delta}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega)$  mit  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$  heißt Young'sche Maßlösung des Problems (4.37), falls gilt:

$$\begin{aligned} \nu &= (\nu_{x,t})_{(x,t)} \in Q_T \text{ ist ein } W^{1,1+\delta}\text{-Young'sches Maß auf } \mathbb{R}^N, \\ \int_{Q_t} \langle \nu_{x,t}, \mathbf{q} \rangle \cdot \nabla \xi + \frac{\partial u}{\partial t} \xi \, dx \, dt &= 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(Q_T), \\ \nabla u(x, t) &= \langle \nu_{x,t}, \operatorname{id} \rangle \quad \text{f.ü. in } Q_T, \\ \langle \nu_{x,t}, \mathbf{q} \operatorname{id} \rangle &= \langle \nu_{x,t}, \mathbf{q} \rangle \cdot \langle \nu_{x,t}, \operatorname{id} \rangle \quad \text{f.ü. in } Q_T \text{ und} \\ \operatorname{supp} \nu_{x,t} &\subset \{A \in \mathbb{R}^n ; \phi(A) = \phi^{**}(A)\} \quad \text{f.ü. in } Q_T. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Nun sei an die Definition aus Kapitel 3 erinnert:

**Definition 4.11.** (Fenchel-Transformation)

Sei  $X$  ein vollständiger Raum und  $X^*$  sein Dualraum, so heisst für eine Funktion  $f \in C(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &:= \sup_{x \in X} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \}, \\ f^{**}(x) &:= \sup_{x^* \in X^*} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \} \end{aligned}$$

die Duale bzw. Biduale von  $f$ .

Die Biduale stellt die Konvexifizierung der Funktion  $f$  dar und wir setzen im folgenden:

$$\begin{aligned} F_\delta(u) &:= \int_{\Omega} \phi_\delta(\nabla u) \, dx \\ &:= \frac{1}{1+\delta} \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \log(\lambda + |\nabla u|^{2(1+\delta)}) + \mu |\nabla u|^{1+\delta} - \mu \arctan\left(\frac{|\nabla u|^{1+\delta}}{\sqrt{\lambda}}\right) \, dx \end{aligned} \quad (4.39)$$

und wir definieren die Energie

$$E_\delta^m(u, v^m) := \frac{1}{2\tau} \|u - v^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + F_\delta(u).$$

Somit ergibt sich

$$\mathbf{q}_\delta = \nabla \phi_\delta \quad \text{und wir setzen} \quad \mathbf{p}_\delta := \nabla \phi_\delta^{**}.$$

## Diskretisierung

Zur Formulierung des volldiskreten Problems sind einige Vorbereitungen zu treffen.

Im folgenden werden lineare Finite Elemente benutzt. Sei  $\mathcal{T}_h$  eine quasigleichförmige Triangulierung von  $\Omega$ , so dass  $\Omega = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$  mit Gitterweite  $h \in (0, 1)$  gilt. Sei  $S_h$  der zugehörige Raum der stückweise stetig affinen Elemente definiert durch

$$S_h := \left\{ \chi \in C(\bar{\Omega}) ; \chi|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

wobei  $P_d(K)$  den Raum der Polynome vom Grades  $d$  auf  $K$  bezeichnet.

Es sei vermerkt, dass der approximierte Gradient auf jedem Element  $K_h^i \in S_h$  für den Fall  $u_h \in S_h$  konstant ist und somit die Definition

$$A_h^i := \nabla u_h \Big|_{K_h^i} \in M^2$$

gerechtfertigt ist. Wir definieren das diskrete Young'sche Maß  $\nu_h$  durch

$$\mathbf{p}_\delta(A_h^i) = \int_{K_h^i} \mathbf{q}_\delta(A) \, d\nu_h^i(A).$$

Somit erhalten wir eine Folge von Gradientenmaßen

$$\nu_h = \{(\nu_h)_x\}_{x \in \Omega} \quad \text{mit} \quad (\nu_h)_x = \nu_h^i \text{ für } x \in K_h^i.$$

Seien  $\tau > 0$  und  $t_m := m\tau$  so gegeben, dass  $\{t_m\}_{m=0}^M$  eine Zerlegung von  $[0, T]$  ist. Setze  $u^m(x) := u(x, t_m)$  und  $\partial u^m := \tau^{-1}(u^m - u^{m-1})$ .

Setze für geeignetes  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\langle \vec{f}, \nu_h^m \rangle := \int_{M^2} \vec{f}(A) \, d\nu_h^m(A).$$

Das Problem (4.37) ist vollständig diskretisiert gegeben durch das folgende Problem: Finde  $\{(U^m, \nu_h^m)\}_{m=0}^M$  mit  $U^m \in S_h$  und  $\nu_h^m$ , so dass

$$\int_{\Omega} \partial U_h^m V_h + \langle \mathbf{q}_\delta, \nu_h^m \rangle \nabla V_h \, dx = 0 \quad \forall V_h \in S_h \quad (4.40)$$

mit

$$\langle \text{Id}, \nu_h^m \rangle = \nabla U^m \quad \text{f.ü. in } \Omega, \quad (4.41)$$

$$\langle \mathbf{q}_\delta \text{Id}, \nu_h^m \rangle = \langle \mathbf{q}_\delta, \nu_h^m \rangle \cdot \langle \text{Id}, \nu_h^m \rangle \quad \text{f.ü. in } \Omega \quad (4.42)$$

für  $1 \leq m \leq M$  gilt. Dabei ist  $U^0 := P_h^0 u^0 \in S_h$  und  $P_h^0$  bezeichnet die  $L^2$ -Projektion auf  $S_h$ .

## Existenz

In einem ersten Schritt zeigen wir die Existenz einer Lösung des numerischen Flußes (4.40) in einer formalen Art.

**Lemma 4.12.** *Das Verfahren (4.40) besitzt eine eindeutige Lösung und es gilt*

$$\|U_h^m - U_h^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_{h,1}^0 - U_{h,2}^0\|_{L^2}, \quad 0 \leq m \leq M.$$

*Beweis:*

Die Gleichung (4.40) lässt sich auch schreiben als

$$\int_{\Omega} \partial U^m V_h + \mathbf{p}_\delta(\nabla U_h^m) \nabla V_h \, dx = 0 \quad \forall V_h \in S_h,$$

und aus der strikten Konvexität von  $\mathbf{p}_\delta$  folgt, daß eine eindeutige Lösung existiert (vergleiche [20]).

**Lemma 4.13.** *(Diskrete Energieabschätzung)*

Sei  $\{(U^m, \nu_h^m)\}_{m=1, \dots, M}$  eine Lösung des volldiskreten Problems (4.40). Dann gilt

$$\|U^m\|_{W^{1,1+\delta}(\Omega)} + \|U^m\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \quad \text{und} \quad F_\delta(U^m) \leq F(U^0)$$

für  $m = 1, \dots, M$ .

*Beweis:* (Vergleiche [23], [57], [16], [43]) Summieren ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{m=1}^M \frac{(U_h^m - U_h^{m-1})}{\tau} V_h \, dx &= - \int_{\Omega} \sum_{m=1}^M \langle \mathbf{q}_\delta, \nu_h^m \rangle \nabla V_h \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_\delta(\nabla U_h^m) \nabla V_h \, dx \quad \forall V_h \in S_h. \end{aligned}$$

Mit der Jensen'schen Ungleichung und der Wachstumsbedingung folgt, da  $\mathbf{q}_\delta$  und  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  konvex sind, die Behauptung.

□

In einem nächsten Schritt werden wir Konvergenz für diese Approximation zeigen.

## Konvergenz

In diesem Abschnitt werden wir Konvergenz in geeignetem Sinne zeigen.

**Definition 4.14.** (Makroskopische Konvergenz)

Wir nennen eine Folge von Young'schen Maßen  $\nu_h := \{\nu_h^x\}_{x \in \Omega}$  makroskopisch konvergent

$$\nu_h^x \rightharpoonup^m \nu^x$$

gegen  $\nu_0 := \{\nu_0^x\}_{x \in \Omega}$ , falls für jede Funktion  $\theta \in C_0(\mathbb{R}^{2 \times 1})$  gilt

$$\langle \theta, \nu_h \rangle \rightarrow \langle \theta, \nu_0 \rangle \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Wir schreiben

$$(u_h, \nu_h^x) \rightarrow^m (u, \nu^x)$$

für  $\nu_h^x \rightharpoonup^m \nu^x$  und  $u_h \rightharpoonup u$ .

**Satz 4.4.1.** (Konsistenz des Verfahrens) *Im Fall  $p > 1$  konvergiert der reguläre Anteil der Lösung des diskreten Problems (4.40) gegen den regulären Anteil der Lösung des kontinuierlichen Problems (4.37). Insgesamt konvergiert*

$$(U^n, \nu_h^n) \rightarrow^m (u, \nu) \quad \text{für } h, \tau \rightarrow 0,$$

wobei  $\nu_h^n$  das zu  $U^n$  gehörige Lösungs-Young'sche-Maß ist.

*Beweis :*

Sei  $\{U_h^m, \nu_h^m\}_{m=0, \dots, M}$  die Lösung des numerischen Flusses zum Diskretisierungsparameter  $h > 0$  und sei  $p = 1 + \delta$ . Definiere sukzessiv die Funktionale  $\Phi_m$

$$\begin{aligned} \Phi_m(v, U_h^{m-1}) &:= \int_{\Omega} \phi_{\delta}(\nabla v) + \frac{1}{2\tau} (v - U_h^{m-1})^2, \\ \Phi_m^{**}(v, U_h^{m-1}) &:= \int_{\Omega} \phi_{\delta}^{**}(\nabla v) + \frac{1}{2\tau} (v - U_h^{m-1})^2 \end{aligned}$$

für  $v \in S_h$ .

Wir erhalten aus dem vorherigen Kapitel die Konvergenz gegen ein Grenzobjekt  $\hat{u}$  mit optimaler Rate, d.h.  $U^m \rightarrow \hat{u}^m$  stark in  $W^{1,p}(\Omega)$  mit

$$\|U^m - \hat{u}^m\|_{W^{1,p}} \leq C(\tau + h).$$

### 1. Existenz des Grenzobjektes für $h \rightarrow 0$

Nun fixiere  $x \in \Omega$ . Aus der gleichmässigen Beschränktheit der Gradienten  $\nabla U_h^m(x)$  in  $h$  folgt die Beschränktheit der Maße  $\{\nu_x^{m,h}\}$  in  $\mathcal{Y}^p(\mathbb{R}^{2 \times 1})$ . Wir können somit eine konvergente Teilfolge  $\nu_x^{m,h} \subset \mathcal{Y}^p(\mathbb{R}^{2 \times 1})$  (gleich bleibende Bezeichnung) wählen mit

$$\nu_x^{m,h} \xrightarrow{*} \hat{\nu}_x^m \quad \text{schwach-* in } \mathcal{Y}^p(\mathbb{R}^{2 \times 1}),$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \psi(A) d\nu_x^{m,h} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \psi(A) d\hat{\nu}_x^m \quad \forall \psi \in C_0(\mathbb{R}^{2 \times 1}). \quad (4.43)$$

Aus  $\nabla U_h^m \rightarrow \nabla \hat{u}^m$  in  $L^p(\Omega)$  erhalten wir wiederum eine Teilfolge  $\{\nabla U_h^m\}$  (nicht umbenannt) mit  $\nabla U_h^m(x) \rightarrow \nabla \hat{u}^m(x)$  f.ü. in  $\Omega$ . Das Setzen von  $\psi = \phi_\delta$  und  $\psi = \text{Id}$  in (4.43) und die Stetigkeit von  $\phi_\delta^{**}$  ergeben

$$\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \lambda d\nu_x^m(\lambda) = \nabla \hat{u}^m(x) \quad (4.44)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \phi_\delta(\lambda) d\hat{\nu}_x^m(\lambda) = \phi_\delta^{**}(\nabla \hat{u}^m(x)) \quad (4.45)$$

f.ü. in  $\Omega$ .

### 2. Eigenschaft des Grenzobjektes

Nun behaupten wir, dass das Grenzobjekt  $\hat{\nu}_x^m$  ein  $W^{1,p}$ -Gradientenmaß ist. Aus den Eigenschaften

- (i) der Lokalisierung (4.44),
- (ii) der Ungleichung

$$\psi(\nabla U_h^m) \leq \int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \psi(\lambda) d\nu_x^{m,h}(\lambda)$$

für jedes konvexe, nach unten beschränkte  $\psi \in \mathcal{E}^p$  und der Stetigkeit von konvexen Funktionen bezüglich der schwachen-\* Konvergenz,

- (iii) der Beschränktheit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} |\lambda|^p d\hat{\nu}_x^m(\lambda) dx &\leq \frac{1}{c} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \phi_\delta(\lambda) d\hat{\nu}_x^m(\lambda) dx + |\Omega| \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \phi_\delta^{**}(\hat{u}^m) dx + |\Omega| \\ &\leq \frac{C}{c} \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}^m|^p dx + \left(\frac{C}{c} + 1\right) |\Omega| \end{aligned}$$

erhalten wir aus (4.45) und der Wachstumsbedingung für  $\Phi_\delta$  für  $h$  unabhängige Konstanten  $c, C > 0$  die Behauptung.

### 3. Gleichgewichtsgleichung

Sei  $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$  und  $\epsilon > 0$ . Die Wachstumsbedingung von  $\Phi_\delta$  ergibt

$$\phi_\delta^{**}(\lambda + \epsilon \nabla \xi) \leq C(1 + |\lambda|^p).$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \Phi_\delta^{**}(\hat{u}^m, \hat{u}^{m-1}) &\leq \Phi_\delta^{**}(\hat{u}^m + \epsilon \xi, \hat{u}^{m-1}) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi_\delta^{**}(U_h^m) + \frac{1}{2\tau} (U_h^m + \epsilon \xi - U_h^{m-1})^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \phi_\delta^{**}(\lambda) d\hat{\nu}_x^m(\lambda) dx + \frac{1}{2\tau} (\hat{u}^m + \epsilon \xi - \hat{u}^{m-1})^2 \end{aligned}$$

erhalten wir die Gleichgewichtsgleichung

$$\int_{\Omega} \langle \mathbf{p}_{\delta}, \hat{\nu}^m \rangle \cdot \nabla \xi + \frac{(\hat{u}^m - \hat{u}^{m-1})}{\tau} \xi \, dx = 0 \quad \forall \xi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Die Gateaux-Ableitung an der Stelle des Minimierers  $\hat{u}^m$  von  $\Phi_{\delta}^{**}(\cdot, \hat{u}^{m-1})$  ergibt

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}_{\delta}(\hat{\nu}^m) \cdot \nabla \xi + \frac{(\hat{u}^m - \hat{u}^{m-1})}{\tau} \xi \, dx = 0, \quad \forall \xi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Daraus folgt

$$\langle \mathbf{q}_{\delta}, \hat{\nu}^m \rangle = \langle \mathbf{p}_{\delta}, \hat{\nu}^m \rangle = \mathbf{p}_{\delta}(\nabla \hat{u}^m),$$

und somit ergibt sich die gewünschte Gleichgewichtsgleichung

$$\int_{\Omega} \mathbf{q}_{\delta}(\hat{\nu}^m) \cdot \nabla \xi + \frac{(\hat{u}^m - \hat{u}^{m-1})}{\tau} \xi \, dx = 0, \quad \forall \xi \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (4.46)$$

4. Grenzübergang für  $\tau \rightarrow 0$

Definiere

$$\chi^m(t) := \begin{cases} \frac{t}{\tau} - m & \text{für } t \in [\tau m, \tau(m+1)), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und setze

$$\bar{u}(x, t) := \sum_{0 \leq m \leq M} \chi^m(t) \{ \hat{u}^m(x) + \chi^m(t) (\hat{u}^{m+1}(x) - \hat{u}^m(x)) \},$$

$$\bar{v}(x, t) := \sum_{0 \leq m \leq M} \chi^m(t) \hat{u}^m(x),$$

$$\bar{\nu} := (\bar{\nu}_{x,t}^m)_{(x,t) \in Q_T} = \sum_{0 \leq m \leq M} \chi^m(t) \hat{\nu}_x^m,$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{\delta} := \langle \bar{\nu}, \mathbf{q}_{\delta} \rangle = \sum_m \langle \nu^m, \mathbf{q}_{\delta} \rangle.$$

Somit erhalten wir  $\bar{u} \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$  und  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$  auf  $\partial\Omega \times (0, T]$ . Es ergibt sich dann  $\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \lambda \, d\bar{\nu}_x^m(\lambda) = \nabla \bar{v}^m(x)$ . Differenzieren von  $\bar{u}(x, t)$  in der Zeit ergibt

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, t) = \sum_{0 \leq m \leq M} \chi^m(t) \frac{1}{\tau} (\hat{u}^{m+1} - \hat{u}^m)(x) \in L^2(Q_T)$$

und somit

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}}_{\delta} \cdot \nabla \xi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \xi \, dt = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega)$$

für fast alle  $t \in (0, T]$ .

Daher gilt

$$\int_0^T \int_{\Omega} \langle \bar{\nu}, \mathbf{q}_{\delta} \rangle \cdot \nabla \xi + \bar{u}_t \xi \, dx \, dt = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(Q_T)$$

und

$$\langle \bar{\nu}, \mathbf{q}_\delta \rangle = \langle \bar{\nu}, \mathbf{p}_\delta \rangle \quad \text{f.ü. in } Q_T.$$

Die Wachstumsbedingungen von  $\phi_\delta$  und  $\mathbf{q}_\delta$  ergeben die gleichmässige Beschränktheit von  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  in  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  und  $\bar{q}_\delta$  in  $L^2(Q_T)$ . Weiter gilt  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \in L^2(Q_T)$ , und  $\bar{\nu}$  ist gleichmässig beschränkt in  $L^\infty(0, T; (\mathcal{E}^p)^*)$ . Die schwache Kompaktheit sichert die Existenz eines Grenzobjektes  $(u, \nu)$ , welches die Gleichung (4.37) löst. Wie in [23] zeigt man, daß  $u$  der schwache Limes für  $\tau \rightarrow 0$  von  $(\bar{u})$  in  $L^2(Q_T)$  ist und daß zusätzlich  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$  ist. Somit erhalten wir

$$\int_0^T \int_\Omega \langle \nu, \mathbf{q}_\delta \rangle \cdot \nabla \xi + u_t \xi \, dx \, dt = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(Q_T)$$

und damit folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 4.4.2.** *Mit den Konvergenzresultaten des vorangehenden Abschnitts lassen sich in gleicher Weise die, in diesen Abschnitt hergeleiteten, Resultate für den Fall der diskontinuierlichen Finite-Elemente-Approximation zeigen.*

## 4.5 Das diskrete Modellproblem mit linearem Wachstum

In diesem Abschnitt werden wird das ursprüngliche Modellproblem mit linearem Wachstum behandeln. Im Gegensatz zu den vorangehenden Abschnitten werden wir keine Konvergenz zeigen, da die Voraussetzungen des Problems der Praxis angepaßt sind.

Sei wie zuvor  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  mit  $N = 2$  ein beschränktes, konvex polyhedrales Gebiet. Wir betrachten die Lösungen  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  des Anfangs- und Randwertproblems

$$u_t - \operatorname{div}(a(|\nabla u|) \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \quad (4.47)$$

$$a(|\nabla u|) \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T],$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega,$$

wobei  $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ ,  $\mathbf{n}$  die Auswärtseinheitnormale von  $\partial\Omega$ ,  $a(s) = \frac{\lambda + \mu s}{\lambda + s^2}$  und  $\lambda, \mu > 0$  sind.

Wir bezeichnen mit  $(u, \nu)$  die maßwertige Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (4.47) im Sinne der Young'sches Maße, falls  $u \in L^\infty(0, T; BV(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ ,  $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  und  $\nu = (\nu_{x,t})_{(x,t) \in \Omega \times [0, T]}$  eine parametrisierte Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathbb{R}^N$  sind, so daß

$$\int_0^T \int_\Omega \left( \langle a(|\gamma|) \gamma, \nu_{x,t}(\gamma) \rangle \cdot \nabla \phi + u_t \phi \right) dx dt = 0 \quad \forall \phi \in C^\infty(\Omega \times (0, T)),$$

wobei  $\langle a(|\gamma|) \gamma, \nu_{x,t}(\gamma) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} a(|\gamma|) \gamma d\nu_{x,t}(\gamma)$ ,

$$\nabla u = \langle \gamma, \nu_{x,t}(\gamma) \rangle \quad \text{f.ü. in } \Omega \times (0, T],$$

und  $u(\cdot, 0) = u_0$  in  $\Omega$  ist. Die Existenz einer Young'schen maßwertigen Lösung für diese Art von Vorwärts-Rückwärts-Typ ist für homogene Dirichlet Randbedingungen in [57] gezeigt.

### Notation und Diskretisierung

Nun geben wir die Definition des diskreten Problems. Sei  $T_h$  eine Familie von Zerlegungen von  $\Omega$  in abgeschlossene Dreiecke, wobei  $h$  die Gitterweite bezeichnet. Seien  $\gamma_{\max}^T$  und  $\gamma_{\min}^T$  der jeweils größte bzw. kleinste Winkel des  $N$ -Dreiecks  $\mathcal{T}$ ,  $\gamma_{\min} = \min_{\mathcal{T} \in T_h} \gamma_{\min}^T$  und  $\gamma_{\max} = \max_{\mathcal{T} \in T_h} \gamma_{\max}^T$ . Wir setzen voraus, daß  $T_h$  eine reguläre Triangulierung ist, d.h. der Durchschnitt von jeweils zwei nicht disjunkten nicht identischen Elementen von  $T_h$  ist entweder eine allgemeine Ecke, Kante oder Fläche mit  $\gamma_{\min} > 0$ . Weiterhin nehmen wir an, daß

$$\gamma_{\max} \leq 90^\circ. \quad (4.48)$$

Diese Bedingungen sind ausreichend für den Beweis des diskreten Maximumprinzips. Wir vermerken, daß diese Restriktion (4.48) für den Beweis der einfachen Energieabschätzungen (siehe Theorem 4.15 unten) nicht notwendig ist.

Zur Diskretisierung werden lineare Finite-Elemente benutzt (siehe (4.9)). Sei  $T_N > 0$ ,  $\tau = T/T_N$  die Größe eines Zeitschrittes und  $t^n := n\tau$  for  $0 \leq n \leq T_N$ . Weiterhin bezeichne  $\langle \eta, \bar{\eta} \rangle \equiv \eta \cdot \bar{\eta}$  das Euklidische Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^N$ .

Das Rückwärts-Euler-Differenzen-Verfahren besteht aus dem Finden von Funktionen  $U^n \in S_h$ ,  $n \in \{1, \dots, T_N\}$ , die Lösungen der algebraischen Gleichungen

$$(\partial^\tau U^n, \chi^n)_h + (a(|\nabla U^n|) \nabla U^n, \nabla \chi^n) = 0 \quad \forall \chi^n \in S_h, \quad (4.49)$$

$$U^0 = \Pi_h u_0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.50)$$

sind, wobei gilt

$$a(s) = \frac{\lambda + \mu s}{\lambda + s^2}, \quad (4.51)$$

$\lambda, \mu > 0$  und  $\partial^\tau U^n := \tau^{-1}(U^n - U^{n-1})$ .

Das Schema enthält die *Lumping-Massen-Technik*. Es ist dadurch einfacher zu implementieren. Weiterhin sei vermerkt, daß eine weitere praktische Wahl von  $U^0$  möglich ist.

## Existenz und Charakterisierung der diskreten Lösung

Das erste Theorem behandelt die Existenz einer Lösung des diskreten Vorwärts-Rückwärts-Problems (4.49)–(4.50). Es wird eine einfache a priori-Abschätzung gezeigt.

**Theorem 4.15.** *Es existiert eine Lösung  $U^n \in S_h$  ( $1 \leq n \leq T_N$ ) der elliptischen Gleichungen (4.49)–(4.50), die*

$$\sup_{1 \leq n \leq T_N} (U^n, U^n)_h + \tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\nabla U^n\|_{L^1(\Omega)} \leq c$$

für eine Konstante  $c > 0$  unabhängig von  $h$  und  $\tau$  erfüllt.

Zum Beweis benötigen wir die Einführung eines Hilfsproblems. Für gegebene Funktionen  $W^1, \dots, W_N^T \in S_h$  definieren wir die Funktionen  $V^n \in S_h$ ,  $1 \leq n \leq T_N$  als Lösungen der elliptischen Gleichungen

$$(\partial^\tau V^n, \chi^n)_h + (b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n, \nabla \chi^n) = 0 \quad \text{für alle } \chi^n \in S_h, \quad (4.52)$$

$$V^0 = \Pi_h u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.53)$$

wobei

$$b(r, s) = \frac{\lambda + \mu r}{\lambda + r s}. \quad (4.54)$$

**Lemma 4.16.** *Es existiert eine Lösung  $V^n \in S_h$ ,  $1 \leq n \leq T_N$ , der Gleichungen (4.52)–(4.53). Weiterhin existiert eine Konstante  $c > 0$  unabhängig von  $h$ ,  $\tau$  und  $W^1, \dots, W_N^T$ , so daß*

$$\sup_{1 \leq n \leq T_N} (V^n, V^n)_h + \tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\nabla V^n\|_{L^1(\Omega)} \leq c. \quad (4.55)$$

*Beweis:*

Sei  $r \geq 0$ ,  $s, \bar{s} \in \mathbb{R}_N^T$  mit Komponenten  $s_i$ , und  $\bar{s}_i$  ( $1 \leq i \leq T_N$ ),

$$F_i(s) := \frac{\lambda + \mu r}{\lambda + r|s|} s_i \quad \text{und} \quad F_{ij}(s) := \frac{\partial}{\partial s_j} F_i(s).$$

Außerdem gilt  $F_{ij}(s) = \frac{\lambda + \mu r}{(\lambda + r|s|)^2} (\lambda \delta_{ij} + |s|^{-1} r (\delta_{ij} |s|^2 - s_i s_j))$ , wobei  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol ist, und

$$(F_i(s) - F_i(\bar{s})) (s - \bar{s})_i = \sum_j (s - \bar{s})_i (s - \bar{s})_j \int_0^1 F_{ij}(\alpha s + (1 - \alpha)\bar{s}) d\alpha.$$

So haben wir  $\sum_i (F_i(s) - F_i(\bar{s})) (s - \bar{s})_i \geq 0$  für alle  $s, \bar{s} \in \mathbb{R}^N$ . Daraus folgt die Existenz von Funktionen  $V^n \in S_h$  ( $1 \leq n \leq T_N$ ) aus der Theorie der monotonen Operatoren. Multiplizieren der  $n$ -ten Gleichung von (4.52) mit  $\tau V^n$  und Summieren über  $n$  von 1 bis  $M \in \{1, \dots, T_N\}$  führt zu

$$\sum_{n=1}^M (V^n - V^{n-1}, V^n)_h + \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} \frac{\lambda |\nabla V^n| + \mu |\nabla W^n| |\nabla V^n|}{\lambda + |\nabla W^n| |\nabla V^n|} |\nabla V^n| dx = 0.$$

Sei  $\Omega_n := \{x \in \Omega : |\nabla V^n(x)| \geq \mu\}$ . Abschätzen von  $\lambda |\nabla V^n| \geq \lambda \mu$  in  $\Omega_n$  ergibt

$$\int_{\Omega_n} \frac{\lambda |\nabla V^n| + \mu |\nabla W^n| |\nabla V^n|}{\lambda + |\nabla W^n| |\nabla V^n|} |\nabla V^n| dx \geq \mu \int_{\Omega_n} |\nabla V^n| dx.$$

Benutzen der Identität

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M (\chi^n - \chi^{n-1}, \chi^n)_h &= \frac{1}{2} (\chi^M, \chi^M)_h - \frac{1}{2} (\chi^0, \chi^0)_h \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M (\chi^n - \chi^{n-1}, \chi^n - \chi^{n-1})_h \end{aligned} \quad (4.56)$$

führt zu

$$\frac{1}{2} (V^M, V^M)_h + \mu \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega_n} |\nabla V^n| dx \leq \frac{1}{2} (V^0, V^0)_h. \quad (4.57)$$

Weiterhin erhalten wir

$$\tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega \setminus \Omega_n} |\nabla V^n| dx \leq \mu T |\Omega|.$$

Damit erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq n \leq T_N} (V^n, V^n)_h + \tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\nabla V^n\|_{L^1(\Omega)} &\leq \frac{1 + 2\mu}{2\mu} (V^0, V^0)_h + \mu T |\Omega| \\ &\leq \frac{(1 + 2\mu)|\Omega|}{2\mu} \|V^0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \mu T |\Omega|. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Aus  $\|V^0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)}^2$  und  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$  folgt die Abschätzung (4.55).

□

Als nächstes beweisen wir das folgende Maximumsprinzip:

**Lemma 4.17.** *Die Lösungen  $V^n \in S_h$ ,  $1 \leq n \leq T_N$ , der Gleichungen (4.52)–(4.53) erfüllen*

$$\sup_{1 \leq n \leq T_N} \|V^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|V^0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.59)$$

*Beweis:*

Seien  $T_h = \dim S_h$  und  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq T_h$ , die stückweise stetigen linearen Basisfunktionen von  $S_h$  mit  $\varphi_i(x^j) = \delta_{ij}$  für jeden Knoten  $x^j$  der Triangulierung. Für  $n \in \{0, \dots, T_N\}$  besitzt die Funktion  $V^n$  die Darstellung  $V^n = \sum_{i=1}^{T_h} \alpha_i^n \varphi_i(x)$ , wobei  $\alpha_i^n \in \mathbb{R}$ . Wir definieren

$$Y^n(x) := \sum_{i=1}^{T_h} \beta(\alpha_i^n) \varphi_i(x),$$

wobei  $\beta(\xi) = |\xi|^{p-1}\tau$  und  $p > 1$  ist. Multiplizieren mit der  $n$ -ten Gleichung von (4.52) mit  $\tau Y^n$  und Summieren über  $n$  von 1 bis  $M \leq T_N$  ergibt

$$\tau \sum_{n=1}^M (\partial^\tau V^n, Y^n)_h + \tau \sum_{n=1}^M (b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n, \nabla Y^n) = 0. \quad (4.60)$$

Betrachte ein fixiertes Dreieck  $\mathcal{T} \in T_h$ . Wir bezeichnen die Ecken mit  $x^i$ ,  $x^j$ ,  $x^l$  und die Seite von  $\mathcal{T}$  gegenüber von  $x^i$  mit  $s_i$ . Sei  $\delta_i := \text{dist}(x^i, s_i)$ . Es gilt

$$\nabla \varphi_i \Big|_{\mathcal{T}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_i}, \quad (4.61)$$

wobei  $\eta_i$  die Normale an  $s_i$  ist. Sei  $\gamma_l$  der Winkel von  $\mathcal{T}$  an der Ecke  $x^l$ . Dann gilt

$$\langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle = -\delta_i^{-1} \delta_j^{-1} \cos \gamma_l \leq 0 \quad (i \neq j). \quad (4.62)$$

Beachte, daß

$$\langle \nabla V^n, \nabla Y^n \rangle = \sum_{i,j=1}^{T_h} \beta(\alpha_i^n) \alpha_j^n \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle \quad (4.63)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{T_h} \beta(\alpha_i^n) \alpha_i^n \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{T_h} (\beta(\alpha_i^n) - \beta(\alpha_j^n)) (\alpha_i^n - \alpha_j^n) \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle. \quad (4.64)$$

Aus der Monotonie von  $\beta$  und der Abschätzung (4.62) schließen wir

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{T_h} (\beta(\alpha_i^n) - \beta(\alpha_j^n)) (\alpha_i^n - \alpha_j^n) \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle \geq 0.$$

Weiter impliziert  $\sum_{j=1}^{T_h} \varphi_j(x) = 1$ , daß  $\langle \nabla \varphi_i, \nabla \sum_{j=1}^{T_h} \varphi_j \rangle = 0$  und

$$\sum_{i,j=1}^{T_h} \beta(\alpha_i^n) \alpha_i^n \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle = 0.$$

Die Verwendung von  $\langle \nabla V^n, \nabla Y^n \rangle \geq 0$  führt zu

$$\tau \sum_{n=1}^M (b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n, \nabla Y^n) = \tau \sum_{n=1}^M \frac{\lambda + \mu |\nabla W^n|}{\lambda + |\nabla W^n| |\nabla V^n|} \langle \nabla V^n, \nabla Y^n \rangle \geq 0,$$

wohingegen das Verwenden der Gleichung (4.60) und die Darstellung von  $V^n$  und  $Y^n$  zu

$$\sum_{n=1}^M \sum_{i=1}^{T_h} \int_{\Omega} (\alpha_i^n - \alpha_i^{n-1}) \beta(\alpha_i^n) \varphi_i(x) dx = \tau \sum_{n=1}^M (\partial^\tau V^n, Y^n)_h \leq 0$$

führt. Zudem gilt  $\alpha_i^n \beta(\alpha_i^n) = |\alpha_i^n|^p$ . Abschätzen von  $|\alpha_i^{n-1}| |\beta(\alpha_i^n)| \leq \frac{1}{p} |\alpha_i^{n-1}|^p + \frac{p-1}{p} |\alpha_i^n|^p$  führt zu

$$\sum_{n=1}^M (\alpha_i^n - \alpha_i^{n-1}) \beta(\alpha_i^n) \geq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^M |\alpha_i^n|^p - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^M |\alpha_i^{n-1}|^p = \frac{1}{p} |\alpha_i^M|^p - \frac{1}{p} |\alpha_i^0|^p$$

und demzufolge zu

$$\left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{T_h} |\alpha_i^M|^p \varphi_i(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{T_h} |\alpha_i^0|^p \varphi_i(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aus  $\sum_{i=1}^{T_h} \varphi_i(x) = 1$  folgt

$$\left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{T_h} |\alpha_i^0|^p \varphi_i(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{1 \leq i \leq T_h} |\alpha_i^0| \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{T_h} \varphi_i(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|V^0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.65)$$

Weiter gilt

$$\|V^M\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{T_h} \alpha_i^M (\varphi_i(x))^{\frac{1}{p}} (\varphi_i(x))^{\frac{p-1}{p}} \right|^p dx \quad (4.66)$$

$$\leq \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{T_h} |\alpha_i^M|^p \varphi_i(x) \right) \left( \sum_{i=1}^{T_h} \varphi_i(x) \right)^{p-1} dx. \quad (4.67)$$

Aus der Beziehung  $\sum_{i=1}^{T_h} \varphi_i(x) = 1$  und den Beziehungen (4.65) und (4.65) folgt, daß

$$\|V^M\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|V^0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

für alle  $M \in \{1, \dots, T_N\}$  gilt. Aus dem Grenzprozeß  $\lim_{p \rightarrow \infty}$  folgt somit die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 4.5.1.** Das Maximumsprinzip (4.59) gilt gleichmäßig in  $\mu$ . Ausserdem folgt aus dem Beweis (4.55) die stabile Abschätzung

$$\sup_{1 \leq n \leq T_N} (V^n, V^n)_h \leq (V^0, V^0)_h \quad \forall \mu > 0.$$

Weiterhin ist  $\tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\nabla V^n\|_{L^1(\Omega)}$  beschränkt durch eine Konstante des Typs  $c\mu^{-1}$  für  $\mu \rightarrow 0$ .

Das Hauptwerkzeug im Beweis von Theorem 4.15 ist der Fixpunktsatz von Brouwer, cf. [60].

*Beweis von Theorem 4.15:*

Wir definieren

$$E^{T_N} := \left\{ (\chi^1, \dots, \chi^{T_N}) \in [S_h]^{T_N} : \left( \sup_{1 \leq n \leq T_N} (\chi^n, \chi^n)_h \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_0, \tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\nabla \chi^n\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 \right\},$$

wobei  $c_0 = \sqrt{c_1}$  und

$$c_1 = \frac{(1 + 2\mu)|\Omega|}{2\mu} \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \mu T |\Omega|$$

gilt. Die Menge  $E^{T_N}$  ist eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge des endlich dimensionalen Raums. Sei  $(W^1, \dots, W^{T_N}) \in E^{T_N}$ . Weiter seien  $V^1, \dots, V^{T_N}$  Lösungen des Hilfsproblems (4.52)–(4.53). Abschätzen von (4.58) impliziert, daß  $(V^1, \dots, V^{T_N}) \in E^n$ . Somit bildet die Abbildung  $\sigma : (W^1, \dots, W^{T_N}) \rightarrow (V^1, \dots, V^{T_N})$  die Teilmenge  $E^{T_N}$  in sich selbst ab. Wir nehmen an, daß  $\sigma$  stetig ist. Anwendung des Brouwer'schen Fixpunkttheorems auf  $(W^1, \dots, W^{T_N}) \in E^{T_N}$  führt zu  $\sigma(W^1, \dots, W^{T_N}) = (W^1, \dots, W^{T_N})$ . Dies zeigt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung  $\sigma$  stetig ist. Wir betrachten die Folge  $(W_i^1, \dots, W_i^{T_N})_{i \in \mathbb{T}_N}$ , die gegen  $(W^1, \dots, W^{T_N})$  konvergiert, d.h.

$$\left( \sup_{1 \leq n \leq T_N} (W^n - W_i^n, W^n - W_i^n)_h \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\nabla (W^n - W_i^n)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (4.68)$$

für  $i \rightarrow \infty$ . Sei  $V_i^1, \dots, V_i^{T_N} \in S_h$  eine Lösung der Gleichungen

$$(\partial^\tau V_i^n, \chi^n)_h + (b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V_i^n|) \nabla V_i^n, \nabla \chi^n) = 0 \quad \forall \chi^n \in S_h, \quad (4.69)$$

wobei  $V_i^0 = \Pi_h u_0$ . Subtraktion der  $n$ -ten Gleichung (4.69) von

$$(\partial^\tau V^n, \chi^n)_h + (b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n, \nabla \chi^n) = 0$$

und Summieren über  $n$  von 1 bis  $M \leq T_N$  und anschließendes Multiplizieren mit  $\tau$  führt zu

$$J_1 + J_2 := \sum_{n=1}^M (V^n - V_i^n - (V^{n-1} - V_i^{n-1}), \chi^n)_h \quad (4.70)$$

$$+\tau \sum_{n=1}^M (b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n - b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V_i^n|) \nabla V_i^n, \nabla \chi^n) = 0. \quad (4.71)$$

Wir setzen  $\chi^n := V^n - V_i^n$  für  $1 \leq n \leq M$ . Um das Integral  $J_1$  nach unten abzuschätzen, benutzen wir die Identität (4.56). Aus der Gleichheit  $V_i^0 = V^0$  folgt

$$J_1 \geq \frac{1}{2} (V^M - V_i^M, V^M - V_i^M)_h.$$

Zudem haben wir

$$J_2 = \tau \sum_{n=1}^M (b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n - b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n, \nabla V^n - \nabla V_i^n) \quad (4.72)$$

$$+ \tau \sum_{n=1}^M (b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n - b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V_i^n|) \nabla V_i^n, \nabla V^n - \nabla V_i^n) \quad (4.73)$$

$$=: J_{21} + J_{22}. \quad (4.74)$$

Sei  $r, s \in \mathbb{R}^N$  und  $F_j(s) := \frac{\lambda + \mu|r|}{\lambda + |r||s|} s_j$ . Ausserdem sei  $F_{jm}(s) := \frac{\partial}{\partial s_m} F_j(s)$ . Es folgt somit

$$F_{jm}(s) = (\lambda + |r||s|)^{-2} (\lambda + \mu|r|) [(\lambda + |r||s|) \delta_{jm} - |r||s|^{-1} s_j s_m]$$

und

$$\sum_{j,m=1}^N F_{jm}(s) \xi_j \xi_m \geq (\lambda + |r||s|)^{-2} (\lambda^2 + \lambda\mu|r|) |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Somit führt die Taylorentwicklung zu

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (F_j(s) - F_j(\bar{s})) (s - \bar{s})_j &= \sum_{j,m=1}^N (s - \bar{s})_j (s - \bar{s})_m \int_0^1 F_{jm}(\Xi s + (1 - \Xi)\bar{s}) d\Xi \\ &\geq |s - \bar{s}|^2 \int_0^1 \frac{\lambda^2 + \lambda\mu|r|}{(\lambda + |r|(\tau s + (1 - \Xi)\bar{s}))^2} d\Xi. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Wir setzen  $r := \nabla W_i^n$ ,  $s := \nabla V^n$  und  $\bar{s} := \nabla V_i^n$  und bemerken, daß für  $\|V^n\|_{L^\infty(\Omega)} + \|V_i^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_h$  eine Konstante  $c_h > 0$  in Abhängigkeit von  $h$  existiert, so daß  $\|\nabla V^n\|_{L^\infty} + \|\nabla V_i^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_h$  gilt. Daraus schließen wir

$$J_{22} \geq \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |\nabla V^n - \nabla V_i^n|^2 \int_0^1 \frac{\lambda^2 + \lambda\mu|\nabla W_i^n|}{(\lambda + |\nabla W_i^n|(\tau \nabla V^n + (1 - \tau)\nabla V_i^n))^2} d\tau dx \quad (4.76)$$

$$\geq c_h \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |\nabla V^n - \nabla V_i^n|^2 \quad (4.77)$$

für eine Konstante  $c_h$  abhängig von  $\lambda, \mu$  und  $h$ .

Außerdem erhalten wir die Abschätzung

$$|J_{21}| \leq \delta \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |\nabla V^n - \nabla V_i^n|^2 \quad (4.78)$$

$$+ c_\delta \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n - b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n|^2 \quad (4.79)$$

für  $\delta > 0$ . Die Taylorentwicklung der Abbildung  $r \rightarrow b(|r|, |s|)s \equiv \frac{(\lambda + \mu|r|)s}{\lambda + |r||s|}$  zeigt, daß

$$|b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n - b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n| \quad (4.80)$$

$$\leq |\nabla W^n - \nabla W_i^n| \int_0^1 \frac{\lambda |\nabla V^n| |\mu - |\nabla V^n||}{(\lambda + |\nabla V^n|(\Xi \nabla W^n + (1 - \Xi)\nabla W_i^n))^2} d\Xi \quad (4.81)$$

$$\leq |\nabla W^n - \nabla W_i^n| \frac{|\nabla V^n| |\mu - |\nabla V^n||}{\lambda}. \quad (4.82)$$

Nun folgt aus  $\|\nabla V^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_h$ , daß

$$\tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |b(|\nabla W^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n - b(|\nabla W_i^n|, |\nabla V^n|) \nabla V^n|^2 dx \quad (4.83)$$

$$\leq c_h \tau \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |\nabla W^n - \nabla W_i^n|^2 dx \quad (4.84)$$

für eine Konstante  $c_h$  gilt, die abhängig ist von  $\lambda, \mu$  und  $h$ . Insgesamt ergeben diese Resultate die Existenz einer von  $i$  unabhängige Konstanten  $c > 0$ , so daß

$$\begin{aligned} (V^M - V_i^M, V^M - V_i^M)_h + \tau \sum_{n=1}^M \|\nabla V^n - \nabla V_i^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq c \tau \sum_{n=1}^M \|\nabla W^n - \nabla W_i^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

gilt. Außerdem gilt

$$\|\nabla W^n - \nabla W_i^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\|\nabla W^n\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla W_i^n\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\nabla W^n - \nabla W_i^n\|_{L^1(\Omega)} \quad (4.86)$$

$$\leq c_h \|\nabla W^n - \nabla W_i^n\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.87)$$

Daraus folgt mit (4.85) und (4.87), daß

$$\left( \sup_{1 \leq n \leq T_N} (V^n - V_i^n, V^n - V_i^n)_h \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \tau \sum_{n=1}^{T_N} \|\nabla(V^n - V_i^n)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$$

für  $i \rightarrow \infty$  gilt. Dies schließt den Beweis des Theorems.

□

# Kapitel 5

## Anwendung und numerische Experimente

### 5.1 Einleitung

In diesem Kapitel soll das ursprüngliche Modellproblem mit linearem Wachstum implementiert werden. In einem ersten Schritt werden wir das Problem mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode im Ort und mit der Rückwärts-Euler-Methode in der Zeit vollständig diskretisieren und anschließend Eigenschaften der diskreten Lösung untersuchen. Im Ort werden wir eine *Lumping-Massen-Methode* verwenden, die uns das diskrete Maximumsprinzip sichert. In einem nächsten Schritt folgt die Implementierung und die Präsentation von ausgewählten numerischen Experimenten.

## 5.2 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt illustrieren wir das Verhalten der diskreten Lösung von (4.49)–(4.50) für verschiedene Parameterwahlen und verschieden gewählte  $\mu$  und  $\lambda$ . Wir geben Beispiele aus der Geomorphologie und Bildverarbeitung. Zuerst soll aber die Evolution verschiedener synthetischer geometrischer Strukturen untersucht werden, um die Phänomene des Konvektifikationseffekts und des Rundungseffekts, der Invarianzeigenschaft und des Verschwindens in endlicher Zeit zu analysieren.

Folgendes iterative Verfahren wurde zur Berechnung benutzt:

$$(U_m^n, \chi^n)_h + \tau (a(|\nabla U_{m-1}^n|) \nabla U_m^n, \nabla \chi^n) = (U^{n-1}, \chi^n)_h \quad \forall \chi^n \in S_h \quad (5.1)$$

sukzessiv für  $n = 1, \dots, N$ . So erhalten wir für jede gegebene Funktion  $U^{n-1}$  eine Funktionsfolge  $(U_m^n)_m \in S_h$ . Diese Folge konvergiert, und es gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} U_m^n = U^n$ . Nun wollen wir diesen Grenzwert  $U_m^n$  ( $m \rightarrow \infty$ ) genauer untersuchen. Für ein fixiertes  $n \in \mathbb{N}$  existiert für die Funktion  $U_m^n$  eine Darstellung  $U_m^n = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i^m \varphi_i(x)$ , wobei  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq N_h$ , Basisfunktionen von  $S_h$  sind. Sei  $\alpha^m$  der Vektor mit den Elementen  $(\alpha^m)_i = \alpha_i^m$ . Zudem sei  $A_m$  eine Matrix, deren Elemente durch  $(A_m)_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_h + \tau (a(|\nabla U_m^n|) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)$  definiert sind. In Matrixnotation (5.1) lässt sich dies ausdrücken durch

$$A_{m-1} \alpha^m = b$$

für einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^{N_h}$ . Wir haben

$$\alpha^{m+2} - \alpha^{m+1} = (A_{m+1}^{-1} - A_m^{-1}) b = A_{m+1}^{-1} (A_m - A_{m+1}) A_m^{-1} b.$$

Sei  $K_m$  die Matrix mit Elementen  $(K_m)_{ij} = (a(|\nabla U_m^n|) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)$ . Abschätzen ergibt

$$\|\alpha^{m+2} - \alpha^{m+1}\|_\infty = \|A_{m+1}^{-1} (\tau K_m - \tau K_{m+1}) A_m^{-1} b\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (5.2)$$

$$\leq \|A_{m+1}^{-1}\| \|\tau\| \|K_m - K_{m+1}\| \|A_m^{-1}\| \|b\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5.3)$$

wobei  $\|\cdot\|$  die Zeilensummennorm ist. Beachte, daß  $|a(|s|)| \leq c(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + 1)$  ist und somit  $\|A_{m+1}^{-1}\|$  gleichmässig beschränkt in  $m$  ist, falls  $\tau$  genügt klein gewählt ist. Weiterhin führt die Relation  $|a(|s|) - a(|\bar{s}|)| \leq c_\lambda (\mu + 1) |s - \bar{s}|$  für eine Konstante  $c_\lambda$ , die nur von  $\lambda$  abhängig ist, auf

$$\|K_{m+1} - K_m\|_{L^2(\Omega)} \leq c(h) \|\alpha^{m+1} - \alpha^m\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Mit der Wahl von  $\tau$  genügend klein existiert somit ein  $\bar{c} < 1$  unabhängig von  $m$  (und  $\mu$ ), so daß gilt

$$\|\alpha^{m+2} - \alpha^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \bar{c} \|\alpha^{m+1} - \alpha^m\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Dann konvergiert nach dem Banach'schen Fixpunktsatz die Folge  $(\alpha^m)_m$ .

**Beispiel 5.2.1.** *In diesem Beispiel wird das Verfahren auf ein Standardgraubild, das durch 30% Gauß'sches Rauschen gestört ist, angewendet. Figur 5.5 zeigt das verrauschte und bearbeitete Bild im Vergleich. Außerdem sind verschiedene Zeitaufnahmen der diskreten Lösung  $U(x, t)$  zu den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  für  $\lambda = 1$  und kleines  $\mu = 10^{-3}$  dargestellt. Die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  sind so gewählt, daß das Problem (5.1) nahe am Perona-Malik-Modell ist. Wie erwartet ergibt sich kein Konvektifizierungssphänomen, die Ecken bleiben erhalten und werden teilweise verstärkt, und das Rauschen wird beseitigt.*

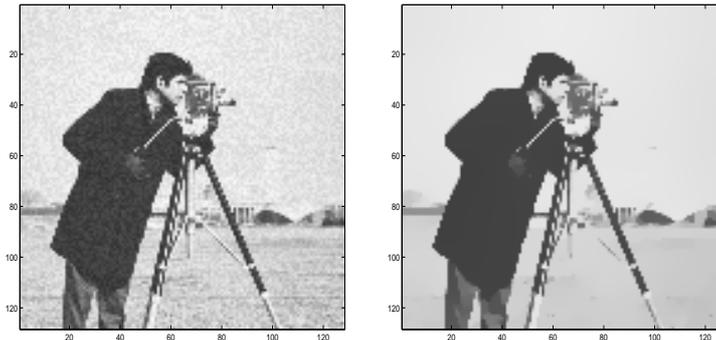


Abbildung 5.1: Entrauschen eines Standardbildes.

**Beispiel 5.2.2.** *Dieses Beispiel behandelt die Formgeneralisierung und illustriert die Anwendung unseres Modells in der Geomorphologie zur Generalisierung von digitalen Höhenmodellen (digital elevation models DEM). Im speziellen erlaubt das Verfahren die Charakterisierung einer geomorphologischen Fläche z.B. durch die Steigung und durch Krümmungsgrößen. Abgebildet ist die Prozeßierung eines 50 m Höhenmodells des Bröltals<sup>1</sup> nahe Bonn in Deutschland. Figur 5.2 zeigt Momentaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten, wobei  $(\lambda, \mu, k, h) = (1, 10^{-3}, 10^{-3}, 8.26 \cdot 10^{-3})$  gewählt wurde. Das erste Bild zeigt das normalisierte DEM und das zweite Bild ist das Original-DEM gestört durch 20% Gauß'sches Rauschen. Die untere Hälfte der Figur 5.2 illustriert die Generalisierung des DEM. Es zeigt das normalisierte DEM zu den Zeitpunkten  $t = 1 \cdot 10^{-3}$  und  $t = 3 \cdot 10^{-3}$ . Es ist zu erkennen, daß die wesentlichen Merkmale des Höhenmodells erhalten bleiben, wohingegen das Rauschen effektiv entfernt wird.*

**Beispiel 5.2.3.** *Eine charakteristische Eigenschaft unseres Diffusionsmodells ist die Invarianz von einfachen konvexen Objekten mit nicht zu starken Randkrümmungen. Zum Beispiel bleibt der Träger einer Kreisscheibe mit einem geeignet großen Radius invariant in der Zeit (cf. [4] für den TV-Fluß), wohingegen die Ecken eines Rechtecks abgerundet werden, da die Krümmung an den Ecken des Rechtecks zu stark ist. Dieses Beispiel zeigt die Auswirkung der Krümmung des Trägerrandes auf einfache geometrische Objekte. Als nächstes wird das Rundungs- und Konvexifizierungsphänomen für unterschiedliche Wahl der Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  anhand von künstlichen Objekten mit verschiedenen Krümmungen untersucht. Sei  $a > 0$ ,  $\Omega = [0, a] \times [0, a]$  und  $K \subset \Omega$ . Die Anfangsdaten  $u_0$  sind von der Form  $u_0 = \chi_K$ , wobei  $\chi_K$  die charakteristische Funktion der Menge  $K$  ist. Die Menge  $K$  hat die folgenden Formen:*

a) Drei Kreise:  $K = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ , mit

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : |x - P_i|_2 < r\} \quad (1 \leq i \leq 3), \quad (5.4)$$

$$P_1 = \left(a, a - \frac{\sqrt{3}}{3}l\right), \quad P_2 = \left(a + \frac{l}{2}, a - \frac{\sqrt{3}}{6}l\right), \quad P_3 = \left(\frac{a}{3} + \frac{l}{2}, a - \frac{\sqrt{3}}{6}l\right), \quad (5.5)$$

$$a = 0.5, \quad l = 0.3 \quad \text{und} \quad r = 0.09. \quad (5.6)$$

<sup>1</sup>Die Daten wurden freundlicherweise vom Landesvermessungsamt Nordrheinwestfalen zur Verfügung gestellt.

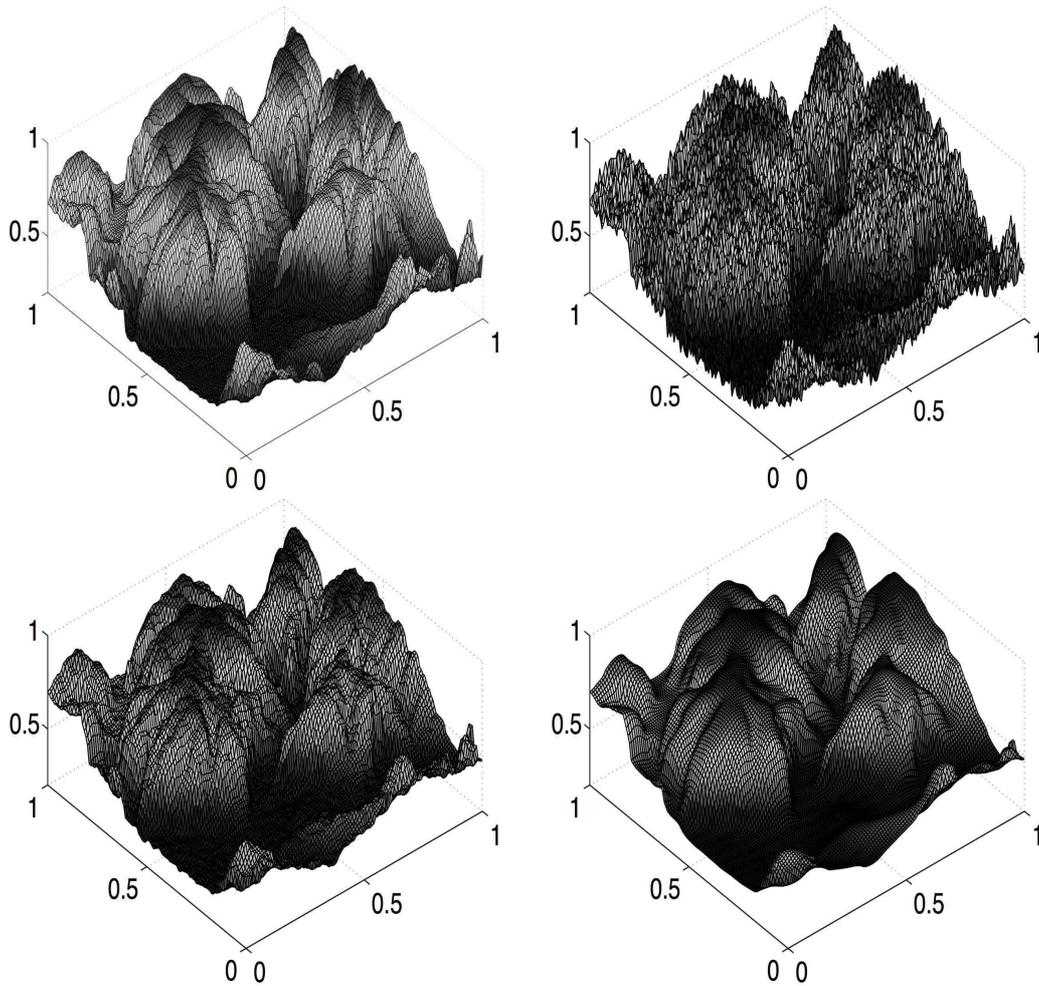


Abbildung 5.2: Formgeneralisierung eines digitalen Höhenmodells.

b) Vier Rechtecke:  $K = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ , wobei

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : |x - P_i|_\infty < s\} \quad (1 \leq i \leq 4), \quad (5.7)$$

$$P_1 = \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right), \quad P_2 = \left(\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}\right), \quad P_3 = \left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right), \quad P_4 = \left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right), \quad (5.8)$$

$$a = 0.5 \quad \text{und} \quad s = 0.0125. \quad (5.9)$$

c) Spitzen:  $K = \Omega_0 \setminus (\bigcup_{i=1}^9 \Omega_i)$ , mit

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : |x - P_1|_\infty < l\}, \quad (5.10)$$

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : |x - P_i|_2 < \frac{l}{4}\} \quad (1 \leq i \leq 9), \quad (5.11)$$

$$P_1 = (a, a), \quad P_{2,3,4,5} = \left(a \pm \frac{l}{2}, a \pm \frac{l}{2}\right), \quad (5.12)$$

$$P_{6,7} = \left(a, a \pm \frac{l}{2}\right), \quad P_{8,9} = \left(a \pm \frac{l}{2}, a\right), \quad (5.13)$$

$$a = 0.5 \quad \text{und} \quad l = 0.3. \quad (5.14)$$

Der Schwerpunkt von  $\text{supp } u_0$  liegt jeweils im Zentrum von  $\Omega$ . Wir setzen die Gitterweite auf  $h = 10^{-2}$  und den Zeitschritt auf  $\tau = 10^{-3}$ . Die oberste Zeile der Figur 5.3 zeigt die Anfangsstruktur bestehend aus drei Kreisen, vier Rechtecken, und vier untereinander

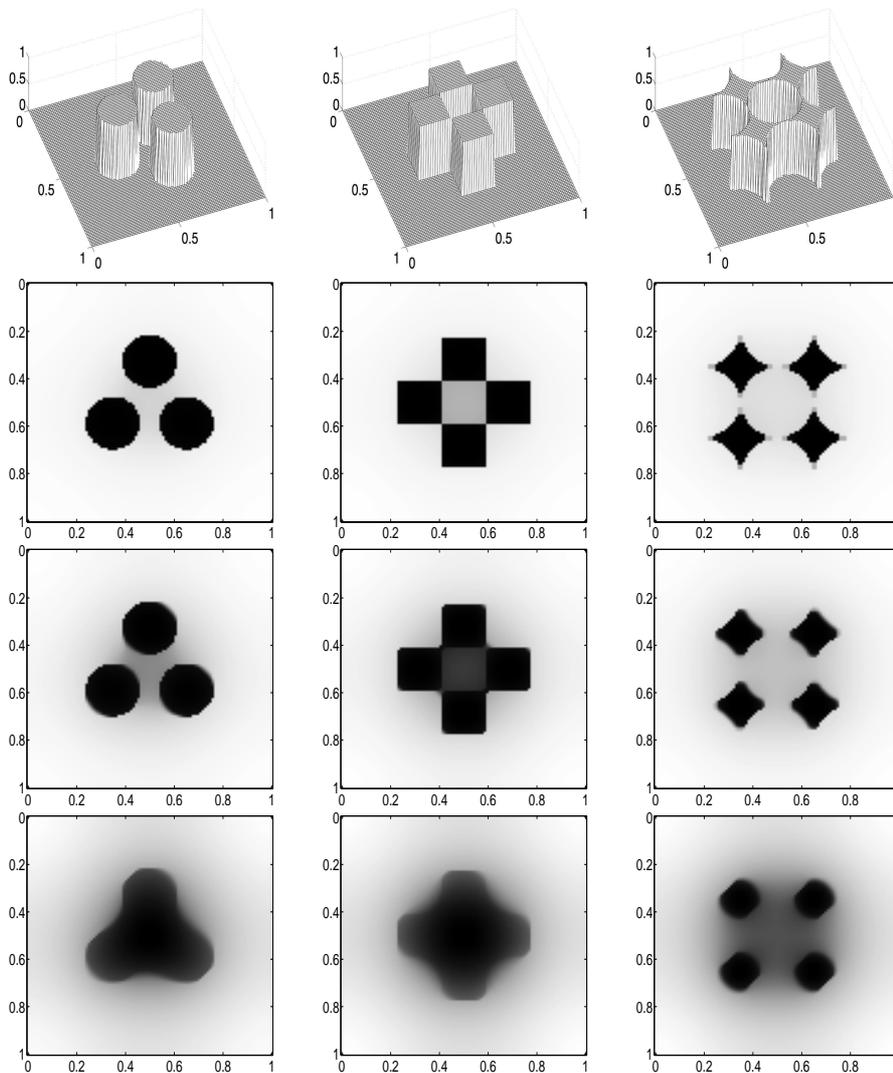


Abbildung 5.3: Invarianz des Trägers – Der Einfluß der Randkrümmung für verschiedene Parameterwahl ( $\mu, \lambda$ ).

verbundenen Sternen. Die zweite, dritte und vierte Zeile zeigen Momentaufnahmen von  $U(x, t)$  für die folgenden drei Szenarien:

- i)  $\lambda = 1, \mu = \frac{1}{4}$ ,
- ii)  $\lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}$ ,
- iii)  $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = 1$

zu den Zeitpunkt an  $t = 0.04$  (erste und dritte Spalte) und  $t = 0.02$  (zweite Spalte).

Wie erwartet kommt es im ersten Szenario (a) zu keinem Rundungseffekt. Allerdings ist eine starke Konvexifizierung erkennbar, falls  $\lambda$  klein und  $\mu$  groß ist. Hier wurde  $\mu = 1$  und  $\lambda = \frac{1}{4}$  gewählt.

Dieses Verhalten ist bekannt für den Total-Variationsfluß. Hingegen bleiben die Konturen für den zu Perona-Malik ähnlichen Fall, d.h. " $\mu = \frac{1}{4}$  klein" und " $\lambda = 1$  groß", fast unverändert. Die Fälle (b) and (c) sind in ihrem Verhalten ähnlich. Im Fall (b) ist ein Rundungseffekt der Ecken erkennbar, dieser ist besonders stark ausgeprägt, falls  $\mu = 1$  groß ist, was gerade dem Fall des TV-Flusses entspricht. Außerdem tritt ein starker Konvexifizierungseffekt ein. Falls  $\mu$  kleiner wird, d.h.  $\mu = \frac{1}{4}$ , bleiben die äußeren Konturen der vier Rechtecke erhalten, aber es kommt zur Auffüllung des inneren Rechtecks. Im Fall (c)

ist die Krümmung der Niveaulinien  $\{u^0 = 1\}$  zu stark, und es kommt selbst für den Fall des PM-Flußes,  $\mu = \frac{1}{4}$ , zur Abrundung der Spitzen. Im Fall des TV-Flußes,  $\mu = 1$ , tritt dieses Verhalten noch stärker hervor, und alle vier Objekte schrumpfen an den Spitzen und verschmelzen im Inneren.

**Beispiel 5.2.4.** Eine charakteristische Eigenschaft der Lösung unseres Diffusionsmodells ist das Verschwinden des Trägers in endlicher Zeit. In Figur 5.4 wird das Abklingen von  $U(x, \cdot)$  für unterschiedliche Wahl von  $\lambda$  und  $\mu$  dargestellt. Die erste Zeile zeigt die Anfangsstrukturen  $u_0$  als dreidimensionale Zeichnung und als Konturzeichnung. In der zweiten Zeile ist der Fall "μ groß" betrachtet, d.h.  $\mu = \lambda = 1$ . Drei Momentaufnahmen des numerischen Flußes entlang der Linie A zu den Zeitpunkten  $t = 0, t = 0.04$  und  $t = 0.2$  sind in der Figur dargestellt. Zudem ist das Abklingprofil von  $U(x, \cdot)$  an den Punkten A, B, C gezeigt. Die dritte Zeile behandelt  $\mu = 0.001$  und  $\lambda = 1$ . Die Momentaufnahmen wurden zu den Zeiten  $t = 0, t = 0.2$  und  $t = 0.62$  aufgenommen. Im Fall des TV-Flußes ( $\mu = 1$ ) fällt die Höhe der Objekte linear in der Zeit ab, wohingegen im Fall des PM-Flußes ( $\mu = 0.001$ ) das Abklingprofil einen nichtlinearen Charakter hat.

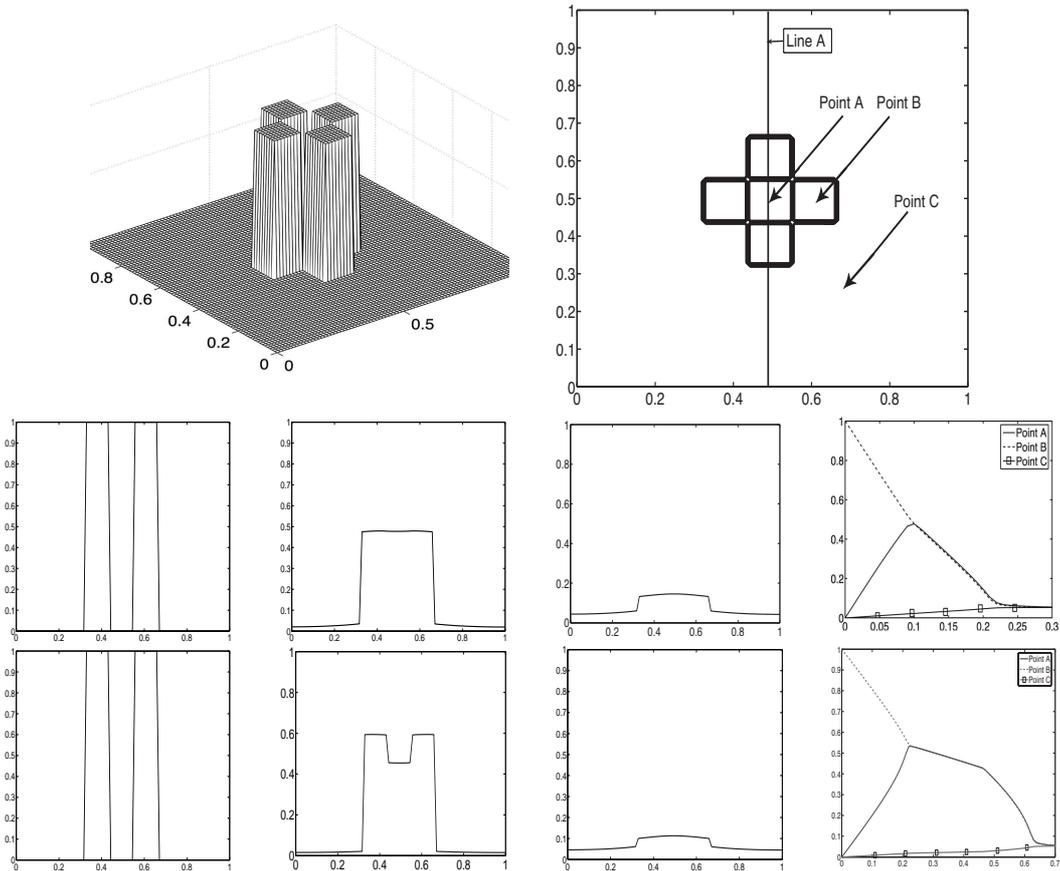


Abbildung 5.4: Endliche Zeitextinktion und Abklingprofil für verschiedene Parameter  $(\mu, \lambda)$ .

## 5.3 Topographische Kurven

### Einleitung

In der Differentialgeometrie werden Flächenpunkte als elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch klassifiziert, während in der Geomorphologie die Begriffe Vertikal- und Horizontalwölbung zu einer Charakterisierung des Reliefs herangezogen werden. Der wesentliche Unterschied besteht in der Auszeichnung einer Achse, die der Schwerkraftachse entspricht.

In diesem Abschnitt führen wir die für die Geomorphologie wesentlichen charakteristischen Krümmungsgrößen ein und geben die Verbindung zur klassischen Differentialgeometrie, cf. [33].

### Differentialgeometrische Notation

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein offenes Gebiet. Ein Flächenstück, oder kurz eine Fläche, soll als eine differenzierbare Abbildung  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert werden, deren Differential  $T_x F : T_x \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{R}^3$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$  injektiv ist. Hier bezeichnet  $T\phi \mathbb{R}^n$  den Tangentialraum an  $\phi$  und  $I_x$  soll die erste und  $II_x$  die zweite Fundamentalform sein.

Mit der Notation  $\kappa_1(x)$  und  $\kappa_2(x)$  wird die maximale bzw. minimale Hauptkrümmung bezeichnet. Weiterhin soll

$$K(x) := \kappa_1(x) \kappa_2(x)$$

die Gaußkrümmung und

$$H(x) := \frac{1}{2} (\kappa_1(x) + \kappa_2(x))$$

die mittlere Krümmung, kurz  $K$  und  $H$ , bezeichnen.

Für eine Fläche  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  ergibt sich nun die Klassifizierung der Punkte  $x_0 \in \Omega$  mit Hilfe der zweiten Fundamentalform. So heißt  $x_0$  elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, je nachdem ob  $\det II_{x_0} > 0$ ,  $< 0$  oder  $= 0$  ist. Die Klassifizierung spiegelt sich direkt in der Taylorentwicklung von  $F$  in  $x_0$  bis zu den Gliedern 2. Ordnung wieder. So ist diese Taylorentwicklung ein elliptisches Paraboloid, ein hyperbolisches Paraboloid oder ein parabolischer Zylinder, falls  $II_{w_0} \neq 0$  gilt.

### Geomorphologische Betrachtung

Wie eingehend erwähnt wird in der Geomorphologie die Achse in Richtung der Schwerkraft ausgezeichnet. So läßt sich mit hinreichenden Regularitätsannahmen die topographische Fläche als Graph

$$\Gamma_f := \{ (x^1, x^2, f(x^1, x^2)) \mid (x^1, x^2) \in \Omega \}$$

einer Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und kartesischen Koordinaten  $(x^1, x^2, x^3)$  darstellen.

Nun sind zwei Kurvensysteme in der geomorphologischen Behandlung besonders wichtig (siehe [35]), und zwar die Horizontallinien und die Falllinien der Topographie.

Das System der Horizontalkurven und ihrer Projektionen auf die Ebene  $x^3 = 0$  ist gegeben als Lösung der Differentialgleichung

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 = 0.$$

Die Wendepunktlinien der Horizontalkurven trennen die Hohlformen und die erhabenen Formen der geomorphologischen Fläche. Dabei verstehen wir als Hohlformen diejenigen Gebiete, in denen sich die konvexe Seite von den Horizontalkurven gegen den Berg hinwendet. Die anderen Gebiete werden als erhabene Formen bezeichnet.

In der Geomorphologie werden nun die Integralkurven des Vektorfeldes in Richtung des steilsten Abstiegs

$$X(x) := -\nabla f = -df(x^1, x^2)$$

als Falllinien der topographischen Fläche bezeichnet. Die Falllinien sind somit durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} dx^2 - \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^1 = 0$$

gegeben.

Sei  $\Phi$  eine Parametertransformation  $\Phi$  in Form einer Rotation um den Winkel  $\alpha$  des Gefälles. Ferner gelte

$$\frac{\partial f}{\partial \phi^2} = \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \phi^2} = 0.$$

Dann zeigt der erste Vektor des Gauß'schen begleitenden 3-Beins (des Graphen  $\Gamma_f$ ) in Richtung des steilsten Anstiegs und der zweite Vektor in Richtung der Höhenlinie. Die Koordinaten sind so gewählt, daß sie sich zur Beschreibung der in der Geomorphologie üblichen extrinsischen Krümmungsgrößen eignen. Zur späteren Klassifikation werden Punkte ausgeschlossen, an denen sich zwei Höhenlinien berühren oder  $\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = 0$  gilt. Anhand der Falllinien lassen sich die Formen eines Geländes durch neun Formtypen [25] klassifizieren lassen. Diese Klassifizierung fällt an Punkten, wo

$$\left\{ (x^1, x^2) ; \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^1 \partial \phi^2}(x^1, x^2) = 0 \right\}$$

gilt, mit der klassischen geometrischen Beschreibung zusammen, da es sich um parabolische Punkte handelt. Diese Klassifizierung wird Anwendung im nächsten Abschnitt finden.

## 5.4 Anwendungen auf Höhenmodelle

Es sei daran erinnert, daß die Krümmungsgrößen in der Geomorphologie extrinsische Größen sind, die der Auszeichnung der Gravitationsachse Rechnung tragen. Die Krümmung der Fläche entlang der Vertikalen steht in diesem Abschnitt im Vordergrund.

Die Wahl lokaler Koordinaten  $\phi^1, \phi^2$  ist so, daß der erste Vektor des Gauß'schen begleitenden 3-Beins (des Graphen) in Richtung des steilsten Anstiegs und der zweite Vektor in Richtung der Höhenlinie zeigt. Die Koordinaten gehen aus den Standardkoordinaten durch eine Rotation um den Winkel  $\alpha$  hervor. Unter Regularitätsannahmen und mit den Abkürzungen

$$p := \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad q := \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad r := \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad s := \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \quad \text{und} \quad t := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}$$

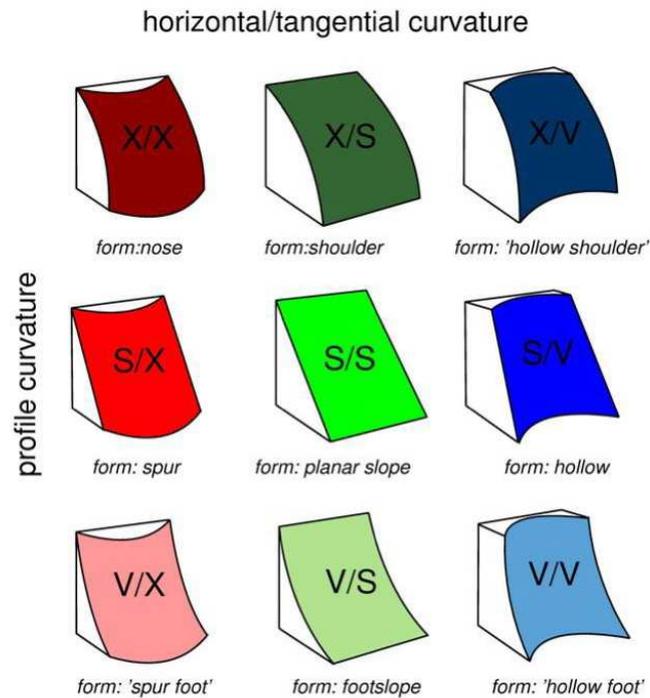


Abbildung 5.5: Geomorphologische Klassifizierung mit gebräuchlicher englischer Bezeichnung

ergeben sich

$$R : = \frac{p^2 r + 2pq s + q^2 t}{p^2 + q^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^1 \partial \phi^1},$$

$$S : = \frac{(p^2 - q^2)s - (r - t)pq}{p^2 + q^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^1 \partial \phi^2},$$

$$T : = \frac{q^2 r - 2pq s + p^2 t}{p^2 + q^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2 \partial \phi^2}.$$

An den Stellen  $S = 0$  ist das Krümmungsverhalten durch  $R$  und  $T$  bestimmt. Insbesondere sind die mittlere Krümmung und Gaußkrümmung

$$H = \frac{1}{2} (R \cos \alpha^3 + T \cos \alpha) \quad \text{und} \quad K = \cos \alpha^4 (RT)$$

durch  $R$  und  $T$  bestimmt.

Wichtig für die mathematische Formulierung der Klassifikation ist, daß nicht die Gesamtheit der Fläche zur Klassifikation herangezogen wird, sondern daß sich die Klassifikation vielmehr an den Linien des größten Gefälles orientiert. Die für das Auge des Betrachters einer geomorphologischen Fläche charakteristischen Linien sind die Punkte des stärksten Gefälles. An einer regulären Horizontallinie lässt sich dies besonders einfach illustrieren. Dazu betrachte man eine Horizontallinie der geomorphologischen Fläche und betrachte die

Punkte an denen das Gefälle

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

maximal oder minimal ist. Mit Hilfe einer parameterisierten Form der Gleichung

$$\frac{dx^1(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{q}{|\nabla f|} \quad \frac{dx^2(\zeta)}{d\zeta} = \frac{p}{|\nabla f|}$$

sind die Punkte der maximalen und minimalen Steilheit entlang der Horizontalkurve in Abhängigkeit von  $\zeta$  durch

$$(p^2 - q^2)s - (r - t)pq = 0$$

gegeben. Daraus folgt aber gerade  $S = 0$ .

So lassen sich diese Punkte mit  $S = 0$  vollständig durch die Vorzeichen von  $R$  und  $T$  klassifizieren. Diese Klassifikation besteht aus neun Formtypen [25]:

- Die Vertikalwölbung ist konvex (X), gestreckt (S), konkav (V) je nachdem ob  $R$  negativ, null oder positiv ist.
- Die Horizontalwölbung ist konvex, gestreckt oder konkav je nachdem ob  $T$  negativ, null oder positiv ist.

In Abbildung 5.4 sind die verschiedenen Formtypen graphisch dargestellt.

In diesem Abschnitt soll nun das in Kapitel 3 entwickelte Modell auf Höhenmodelle angewendet werden. Im ersten Abschnitt ist ein flaches Gelände, das Bröltal<sup>1</sup>, Gegenstand der Untersuchung. Das Gelände weist Höhenunterschiede von bis zu 300 Metern auf. Im darauffolgenden Abschnitt wird ein Ausschnitt Neuseelands als Höhenmodell behandelt. Im letzten Abschnitt wenden wir uns der Formgeneralisierung von Höhenmodellen des Turtmantals zu. Für alle drei Höhenmodelle werden wir die in Kapitel 4.5 entwickelte Finite-Elemente-Methode mit Hilfe des Verfahrens (5.1) verwenden. Für alle drei Höhenmodelle wird die gleiche Parameterwahl  $\tau, h, \lambda$  mit  $\delta = 0$  verwendet.

---

<sup>1</sup>Die Daten wurden freundlicherweise vom Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen zur Verfügung gestellt.

## Bröltal

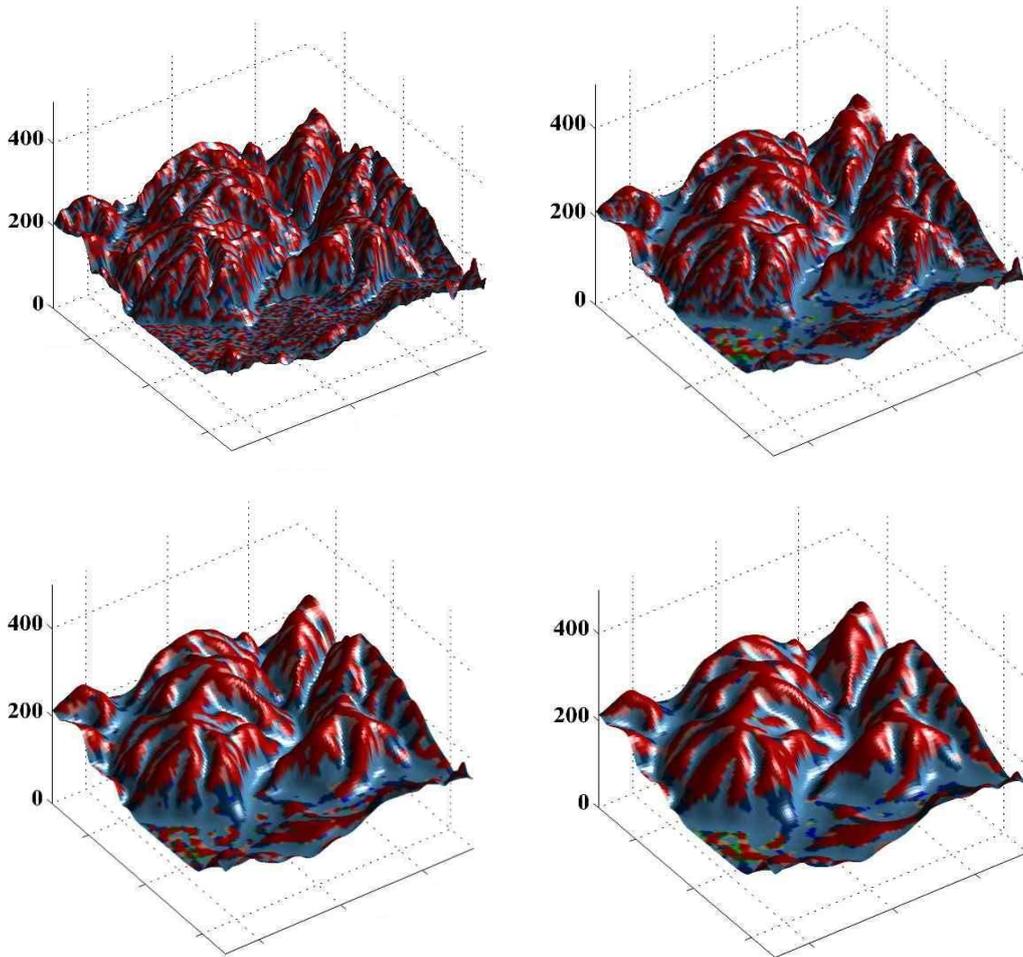


Abbildung 5.6: Formgeneralisierung des digitalen Höhenmodells des Bröltals.

Das DHM stellt ein fluvial geprägtes Gelände dar, wobei das DHM des Bröltals visuell von linienartigen Strukturen dominiert wird. Ausgehend vom Ursprungshöhenmodell wird die Lösung des Schemas (5.1) mit den Modellparametern  $(\lambda, \mu) = (1, \frac{1}{4})$  und den numerischen Parametern  $(\tau, h) = (10^{-2}, 10^{-3})$  berechnet. Abbildung 5.6 zeigt die berechneten generalisierten Höhenmodelle ausgehend vom Ursprungshöhenmodell. Von links nach rechts und von oben nach unten entsprechen sie Momentaufnahmen des numerischen Flußes zu den Zeitpunkten  $t = 0, 10, 20, 30$ . Die Färbung entspricht der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Klassifizierung in konvexe und konkave Bereiche. Die Krümmungsunterschiede fallen mit dem Auftreten von Rinnen und Graten beziehungsweise Kuppen und Kuhlen zusammen.

## Neuseeland

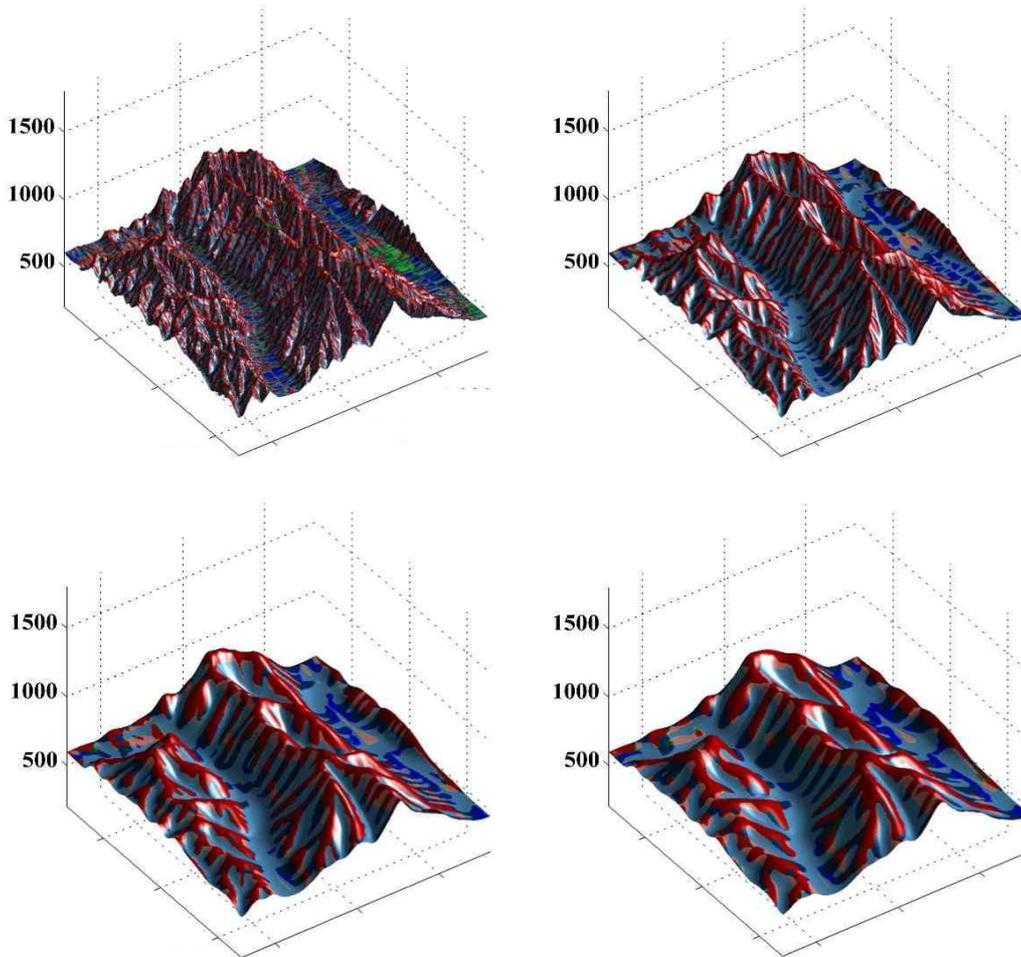


Abbildung 5.7: Formgeneralisierung des digitalen Höhenmodells des Länderauschnitts Neuseeland.

Auch hier ist die plastische Unterteilung in konvexe und konkave Geländestrukturen erkennbar. Gerechnet wurde ein alpiner Ausschnitt von Neuseeland. Abbildung 5.7 zeigt vier Momentaufnahmen  $t = 0, 5, 10, 30$  des numerischen Flusses, wobei die numerischen Parameter als  $(\lambda, \mu, h, k) = (1, 0.25, 5 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-4})$  gewählt wurden.

## Turtmantal

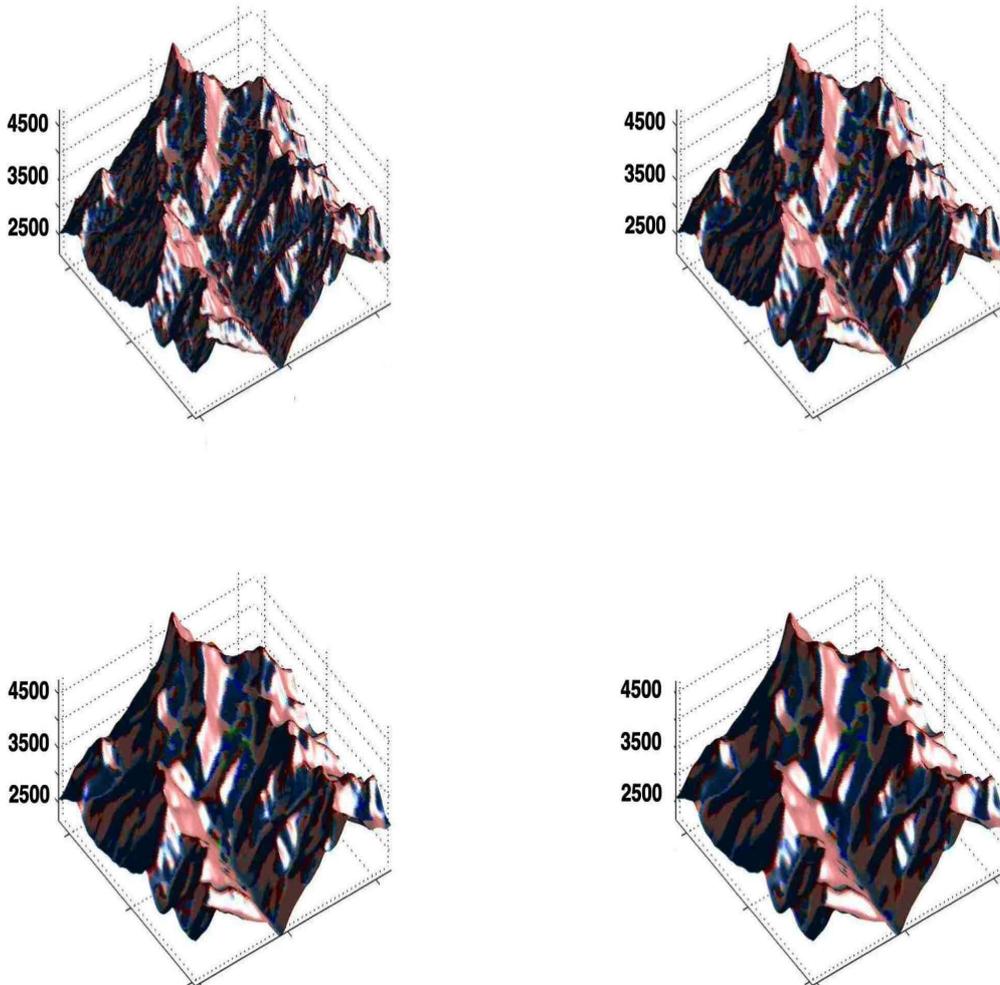


Abbildung 5.8: Formgeneralisierung des digitalen Höhenmodells des Turtmantals.

In diesem letzten Abschnitt wird das Modell auf den hochalpinen Bereich des Turtmantals angewendet. Abbildung 5.8 zeigt einen Ausschnitt des Turtmantals und die entsprechende Färbung von konvexen und konkaven Bereichen. Es wurden hierzu folgende Parameter gewählt:  $(\lambda, \mu, h, k) = (1, 0.25, 5 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-4})$ . Die Momentaufnahmen  $t = 1, 3, 10, 17$  zeigen starke Veränderungen der Fläche und illustrieren die Formgeneralisierung.

# Notationen

## Kapitel 2:

$:=$	Definitionen
$N$	Dimension des euklidischen Raums der reellen Zahlen
$\Omega$	Offenes Gebiet im $\mathbb{R}^N$
$BV$	Raum der Funktionen mit beschränkter Variation
$Q_T$	Raumzeitzyylinder $\Omega \times (0, T]$

## Kapitel 3:

$a.b$	euklidisches Skalarprodukt
$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$	Ableitung in Richtung der Normalen $\mathbf{n}$ , d.h. $\nabla u \cdot \mathbf{n}$
argmin	Minimumargument
$ \Omega $	Lebesgue-Maß von $\Omega$
ess max, ess min	Essentielles Maximum bzw. Minimum
$\Delta_S$	Laplace-Beltrami-Operator
$\mathbf{q}_\delta$	anisotrope Fluxdichte (Seite 11)

## Kapitel 4:

$L^p(\Omega)$	Lebesgueraum
$W^{r,s}(\Omega)$	Sobolevraum
$(W^{r,s}(\Omega))'$	Dualraum zu $W^{r,s}(\Omega)$
$W^{r,s}(0, T; W^{t,q}(\Omega))$	Bochnerräume
$C(\mathbb{R}^N)$	Raum der stetigen Funktionen
$C_c(\mathbb{R}^N)$	Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger
$C_0(\mathbb{R}^N)$	Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden
$rca(\mathbb{R}^N)$	Raum der Radonmaße, $C_0(\mathbb{R}^N)'$
$\text{Prob}(\mathbb{R}^N)$	Raum der Radonwahrscheinlichkeitsmaße
$\mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$	Raum der $L^p$ -Young'schen Maße
$f^*, f^{**}$	Duale und Biduale der Fencheltransformation

**Kapitel 4:**

Voraussetzungen: (HE1-3)	Seite 20
$\mathcal{M}$	Raum der $N \times M$ -Matrizen
$\nu$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathcal{E}_0^p$	Raum der stark abfallenden Funktionale auf $\mathcal{M}$
$\langle \phi, \nu_x \rangle$	Anwendung des Maßes $\nu_x$ auf $\phi$
supp	Träger
$(,)$	$L^2$ -Skalarprodukt
$T_h$	Triangulierung
$S_h$	Raum der stückweise stetigen Finiten-Elemente
$S_{dh}$	Raum der unstetigen Finiten-Elemente
$\  \cdot \ _X$	Norm des Raumes $X$
$\  A \ _{(B)}$	Quasinorm
$H^{s\tau}(\Omega)$	Sobolevraum der stückweis-definierten Funktionen
$\  \cdot \ _{s,T_h}$	Sobolevnorm der stückweis-definierten Funktionen
$  \cdot  _{s,T_h}$	Sobolevseminorm der stückweis-definierten Funktionen
$ A _{(B),\mathcal{T}}$	Quasinorm der stückweis-definierten Funktionen
$[[ \cdot ]]$	Sprung über eine Kante
$\langle \cdot \rangle$	Mittelung
$P_h$	$L^2$ -Projektor
$P_h^0$	geeigneter Interpolant (Scott und Zhang)
$\Pi_h$	$C^0$ -Interpolant
$(,)_h$	Massengelumpptes Skalarprodukt

**Kapitel 5:**

$T_x$	Tangentialraum an $x$
$K, H$	Hauptkrümmung und Gaußkrümmung



# Literaturverzeichnis

- [1] E. ACERBI AND N. FUSCO, *Semicontinuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rational Mech. Anal., 86 (1984), pp. 125–145.
- [2] H.W. ALT AND S. LUCKHAUS, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Z., 183 (1983), pp. 311–341.
- [3] H. AMANN, *Time-delayed Perona-Malik type problems*. Manuskript, eingereicht.
- [4] F. ANDREU-VAILLO, V. CASELLES, AND J. M. MAZÓN, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, vol. 223 of Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [5] E.J. BALDER, *Young measure techniques for existence of Cournot-Nash-Walras equilibria*, in Topics in mathematical economics and game theory (Toronto, ON, 1995), vol. 23 of Fields Inst. Commun., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 31–39.
- [6] ———, *Lectures on Young measure theory and its applications in economics*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 31 (2000), pp. 1–69. Workshop on Measure Theory and Real Analysis (Italian) (Grado, 1997).
- [7] J.M. BALL, *Dynamics and minimizing sequences*, in Problems involving change of type (Stuttgart, 1988), vol. 359 of Lecture Notes in Phys., Springer, Berlin, 1990, pp. 3–16.
- [8] ———, *Some recent developments in nonlinear elasticity and its applications to materials science*, in Nonlinear mathematics and its applications (Guildford, 1995), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 93–119.
- [9] J. M. BALL, *A version of the fundamental theorem for Young measures*, in PDEs and continuum models of phase transitions (Nice, 1988), vol. 344 of Lecture Notes in Phys., Springer, Berlin, 1989, pp. 207–215.
- [10] J.W. BARRETT AND W.B. LIU, *Finite element approximation of degenerate quasilinear elliptic and parabolic problems*, in Numerical analysis 1993 (Dundee, 1993), vol. 303 of Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, pp. 1–16.
- [11] ———, *Finite element approximation of the parabolic  $p$ -Laplacian*, SIAM J. Numer. Anal., 31 (1994), pp. 413–428.
- [12] ———, *Quasi-norm error bounds for the finite element approximation of a non-Newtonian flow*, Numer. Math., 68 (1994), pp. 437–456.

- [13] G. BELLETTINI AND G. FUSCO, *A regularized Perona-Malik functional: some aspects of the gradient dynamics*, in EQUADIFF 2003, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 639–644.
- [14] A. BRAUMANDL, *Geometrische Generalisierung von digitalten Höhenmodellen*, vol. 223 of Dissertation Universität Bonn, Universität Bonn, Basel, 2002.
- [15] S.C. BRENNER AND L.R. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, vol. 15 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 2002.
- [16] C. CARSTENSEN AND M.O. RIEGER, *Young-measure approximations for elastodynamics with non-monotone stress-strain relations*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 38 (2004), pp. 397–418.
- [17] F. CATTÉ, P.L. LIONS, J.M. MOREL, AND T. COLL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), pp. 182–193.
- [18] A. CAYLEY, *On contour and slope lines*, The London, Edinburg and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 31 (1859), pp. 264–268.
- [19] A. CHAMBOLLE AND P.L. LIONS, *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Numer. Math., 76 (1997), pp. 167–188.
- [20] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [21] B. COCKBURN, *Discontinuous Galerkin methods*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 83 (2003), pp. 731–754.
- [22] B. DACOROGNA, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, vol. 78 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [23] S. DEMOULINI, *Young measure solutions for a nonlinear parabolic equation of forward-backward type*, SIAM J. Math. Anal., 27 (1996), pp. 376–403.
- [24] I. DIENING, C. EBMEYER, AND M. RUZICKA, *Optimal convergence for the implicit space-time discretization of parabolic systems with  $p$ -structure*, eingereicht.
- [25] R. DIKAU, *Entwurf einer geomorphographisch-analytischen Systematik von Reliefeinheiten*, vol. 5 of Heidelberger geographische Bausteine, Selbstverlag des Geographischen Institut der Universität Heidelberg, Providence, RI, 1998.
- [26] C. EBMEYER AND W.B. LIU, *Finite element approximation of the fast diffusion and the porous medium equation*, eingereicht.
- [27] ———, *Quasi-norm interpolation error estimates for the piecewise linear finite element approximation of  $p$ -Laplacian problems*, Numer. Math., 100 (2005), pp. 233–258.
- [28] C. EBMEYER AND W.B. T. LIU, *Finite element approximation of fast diffusion and the porous medium equation*, erscheint.

- [29] L.C. EVANS, *Partial Differential Equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [30] P. HOUSTON, J. ROBSON, AND E. SÜLI, *Discontinuous Galerkin finite element approximation of quasilinear elliptic boundary value problems. I. The scalar case*, IMA J. Numer. Anal., 25 (2005), pp. 726–749.
- [31] S. KICHENASSAMY, *The Perona-Malik paradox*, SIAM J. Appl. Math., 57 (1997), pp. 1328–1342.
- [32] D. KINDERLEHRER AND P. PEDREGAL, *Weak convergence of integrands and the Young measure representation*, SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), pp. 1–19.
- [33] J.J. KOENDERINK AND A.J. VAN DOORN, *Image structure*, in Mustererkennung 1997, 19. DAGM-Symposium, London, UK, 1997, Springer-Verlag, pp. 3–35.
- [34] G.M. LIEBERMAN, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [35] H. LIEBMANN, *Geometrische theorie der differentialgleichungen*, in Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1914, pp. 503–609.
- [36] W.B. LIU AND N. YAN, *Quasi-norm a priori and a posteriori error estimates for the nonconforming approximation of  $p$ -Laplacian*, Numer. Math., 89 (2001), pp. 341–378.
- [37] ———, *Quasi-norm local error estimators for  $p$ -Laplacian*, SIAM J. Numer. Anal., 39 (2001), pp. 100–127 (electronic).
- [38] ———, *On quasi-norm interpolation error estimation and a posteriori error estimates for  $p$ -Laplacian*, SIAM J. Numer. Anal., 40 (2002), pp. 1870–1895 (electronic).
- [39] J.C. MAXWELL, *On hills and dales*, London, Edinburgh and Dublin Philosophical, 4 (1870), pp. 421–425.
- [40] J. NITSCHKE, *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 36 (1971), pp. 9–15. Collection of articles dedicated to Lothar Collatz on his sixtieth birthday.
- [41] M. NITZBERG, D. MUMFORD, AND T. SHIOTA, *Filtering, Segmentation and Depth*, vol. 662 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [42] S. OSHER, M. BURGER, D. GOLDFARB, J. XU, AND W. YIN, *An iterative regularization method for total variation-based image restoration*, Multiscale Model. Simul., 4 (2005), pp. 460–489 (electronic).
- [43] P. PEDREGAL, *On the numerical analysis of non-convex variational problems*, Numer. Math., 74 (1996), pp. 325–336.
- [44] ———, *Optimization, relaxation and Young measures*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 36 (1999), pp. 27–58.

- [45] P. PERONA AND J. MALIK, *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 12, 12 (1990), pp. 629–639.
- [46] S.I. REPIN, *A variational-difference method of solving problems with functionals on linear growth*, USSR Comput. Math. Math. Phys., 29 (1989), pp. 35–46.
- [47] L.I. RUDIN, S. OSHER, AND E. FATEMI, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms.*, Physica D, 60 (1992), pp. 259–268.
- [48] L.R. SCOTT AND S. ZHANG, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp., 54 (1990), pp. 483–493.
- [49] R.E. SHOWALTER, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, vol. 49 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [50] M. SLEMROD, *Dynamics of measure valued solutions to a backward-forward heat equation*, J. Dynam. Differential Equations, 3 (1991), pp. 1–28.
- [51] M.A. SYCHEV, *A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 16 (1999), pp. 773–812.
- [52] L. TARTAR, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, vol. 39 of Res. Notes in Math., Pitman, Boston, Mass., 1979, pp. 136–212.
- [53] V. THOMÉE, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, vol. 25 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [54] L.A. VESE AND S.J. OSHER, *Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing*, J. Sci. Comput., 19 (2003), pp. 553–572. Special issue in honor of the sixtieth birthday of Stanley Osher.
- [55] ———, *Image denoising and decomposition with total variation minimization and oscillatory functions*, J. Math. Imaging Vision, 20 (2004), pp. 7–18. Special issue on mathematics and image analysis.
- [56] J. WEICKERT, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, European Consortium for Mathematics in Industry, B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [57] J. YIN AND C. WANG, *Young measure solutions of a class of forward-backward diffusion equations*, J. Math. Anal. Appl., 279 (2003), pp. 659–683.
- [58] L.C. YOUNG, *Generalized surfaces in the calculus of variations*, Ann. of Math. (2), 43 (1942), pp. 84–103.
- [59] ———, *Generalized surfaces in the calculus of variations. II*, Ann. of Math. (2), 43 (1942), pp. 530–544.
- [60] E. ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B*, Springer-Verlag, New York, 1990. Nonlinear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron.